Szoldatics József

Kardos Gyula - Montágh Balázs Matematikaverseny, 2022

Lektorálta: Kiss Géza

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló
Általános Iskola és Gimázium
2022. március – április.

Tartalomjegyzék

Kardos-Montágh Matematikaverseny, 2022.
I. forduló

Algoritmusok

Mi is az az algoritmus? Ez a kérdés alapvető fontosságú, elengedhetetlen fogalom a matematikában és az informatika területén, ugyanakkor nagy szerepe van a mindennapi életben, hiszen számtalanszor alkalmazzuk. Akármit is teszünk, legtöbbször logikusan felépítünk magunkban egy bizonyos sorrendet, melyet követünk. Akarva-akaratlan, tudatosan vagy spontán módon alakítunk ki naponta ismétlődő eljárásokat (algoritmusokat), amelyeket lépésenként hajtunk végre. A matematikában sok feladat valamilyen algoritmus segítségével oldható meg.

Definíció

Az idegen szavak szótára szerint: „Eredetileg Abdallah Mohamed Muza Al-Hvarizmi arab matematikus számolási módszere, azóta minden számolási eljárás."

A matematikai kisenciklopédia, pedig így fogalmaz: „Az olyan eljárásokat, amelyek segítségével a kívánt eredményt az adatoktól függetlenül véges sok lépésben meg tudjuk határozni, algoritmusnak nevezzük ... természetesen nem minden eljárás algoritmus."

Összefoglalva, az algoritmus a matematikából ered, de az informatika elterjedésével vált ismert fogalommá a köznyelvben is. Tulajdonképpen egy számolási módszer, eljárás melyet számos területen alkalmazunk, természetesen elsősorban a matematikában, illetve az informatikában.

Algoritmusok típusai

- **Egyszerű algoritmus (szekvencia)**: más szóval lineáris, elemi lépéseket hajtunk végre egymás után. Ilyenkor az a cél, hogy minél kevesebb lépésből jussunk el a feladat megoldásához.
- **Feltételes algoritmus (elágazás, szelekció)**: akkor beszélhetünk ilyen algoritmusról, ha a feladat nem oldható meg egyszerű lépések segítségével. A megoldás lépései egy bizonyos problémához vezetnek, ahol több eset is felmerülhet. Egy úgynevezett elágazással állhatunk szemben. Ilyenkor a helyzettől függően választanunk kell, hogy melyik lépés a helyes.
- **Ismétléses algoritmus (ciklus, iteráció)**: előfordulhat, hogy az algoritmus során vannak lépések, amelyeket többször is végre kell hajtanunk. Magát a feladatot, amit végrehajtunk, ciklusmagnak nevezzük.

Az egyik legfontosabb e témakörben Böhm–Jacopini tétele, mely szerint minden algoritmus felépíthető szekvencia, szelekció és iteráció segítségével.

Algoritmusok jellemzői, tulajdonságai

- Az algoritmus lépésekből áll, a lépések sorozatát *folyamatnak* nevezzük.
- Minden lépésnek, amit egymás után alkalmazunk, egyértelműnek kell lennie.
- Lehetnek összetett lépések is.
- Absztrakció, vagyis egy kiválogatási eljárás, mely alatt azt értjük, hogy az adatok (tárgyak) azon tulajdonságait vesszük csak figyelembe, amelyek fontosak az algoritmus végrehajtásánál.
- Mindig van valamilyen célja, vagyis egy változás történik a végrehajtás során.
- Bemenő adatokat használ fel.
- Kimenő adatokat hoz létre.
- Biztosítania kell, hogy a feladat véges számú lépésben megoldható legyen.
- Minél rövidebb idő alatt eljuthassunk a kívánt megoldáshoz, vagyis hatékonynak kell lennie.
- Megtervezésnél figyelni kell, hogy „elronthatatlan” legyen.

Ezek után nézzünk néhány, a középiskolában tanított algoritmust.

Euklideszi algoritmus

Az euklideszi algoritmus két szám legnagyobb közös osztójának meghatározására szolgáló módszer. Tulajdonképpen egy számelméleti algoritmus.
Menete: a két szám közül a nagyobbikat elosztjuk a kisebbikkel, majd a maradék lesz az osztó, az osztandó pedig az eddigi osztó és így tovább, míg 0 maradékot nem kapunk. Ebben az esetben az utolsó osztó lesz a keresett érték, vagyis a legnagyobb közös osztó. Ha már az elején, az első osztásnál 0 maradékot kapunk, akkor a kisebbik szám lesz egyben a legnagyobb közös osztója a két számnak.

Eratosztenészi szita

Ez egy olyan algoritmus, amely egy adott számnál nem nagyobb prímeket ad meg viszonylag egyszerű módon.
Írjuk fel 2-től N-ig az egész számokat. Az első lépésben karikázzuk be a 2-t, majd húzzuk át azokat a számokat, amelyek a 2 többszörösei és 2-nél nagyobbak...Ezután karikázzuk be azt a legkisebb számot, amely még nincs megjelölve..., majd húzzuk át ennek a többszöröseit...Ismételjük meg a fentieket mindig a legkisebb még jelöletlen számmal, ha ez a szám még legfeljebb $\sqrt{N}$. Ha már minden $\sqrt{N}$-nél nem nagyobb számot megjelöltünk, akkor álljunk meg. Ekkor a bekarikázott számok együttesen éppen az N-nél nem nagyobb prímszámokat adják.

Négyzetgyökvonás számológép nélkül

A menete a következő (konkrétan 301-re): Mindig kettesével, a tizedesvesszőtől balra jelöljük ki a számokat, tehát páratlan jegyűnél az első kijelölt egyjegyű lesz.

$$3|01 =$$

Megnézzük, hogy az első kijelölt számot milyen szám négyzetével tudjuk alulról közelíteni, ezt leírjuk az egyenlőség után,

$$3|01 = 1$$

majd visszaszorzunk, kivonunk és leírjuk az eredményt,

$$\begin{array}{l} 3|01 = 1 \\ 201 \end{array}$$

majd hozzá a következő két számjegyet. Vesszük az egyenlőségjel utáni számnak a kétszeresét, leírjuk.

$$\begin{array}{ll} 3|01 = 1 & 2 \\ 201 & \end{array}$$

A kétszeres után lesz egy helyi érték, egy szorzásjel, majd a szorzó. A kétszeres után írt szám ugyanaz lesz, mint a szorzó, ezzel ismét alulról közelítjük azt a számot, melyet a négyzetgyökjel alatti alá írunk.

$$\begin{array}{ll} 3|01 = 1 & 2?\cdot ? \\ 201 & \end{array}$$

Ezek után visszaszorzunk, kivonunk és leírjuk a kivonás eredményét,

$$\begin{array}{ll} 3|01 = 1 & 27 \cdot 7 \\ 201 & \\ \ \ 12 & \end{array}$$

majd a következő két számjegyet, ha elérkeztünk a szám végéhez, akkor nullákat írunk, az eredménynél pedig kiírjuk a tizedesvesszőt és ugyanígy tovább.

$$\begin{array}{ll} 3|01 = 17, & 34?\cdot ? \\ 201 & \\ \ 1200 & \end{array}$$

Addig számolhatunk a leírt eljárás szerint, míg el nem jutunk a kívánt pontosságig.

Négyzetgyökvonás, Newton módszer

Newton nevéhez fűződő algoritmus egy rekurzív iteráció. Keressük a pozitív A szám négyzetgyökét!

$$a_1 = 1;\ \text{és}\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right);\ n \geq 2$$

Algoritmus helyességének igazolása

A képzési szabályra alkalmazva a számtani-mértani egyenlőtlenséget:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right) > \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{A}{a_{n-1}}} = \sqrt{A}; \qquad n \geq 2.$$

Egyenlőség nem lehetséges, mert $a_1 = 1 < \sqrt{A}$, és innen adódik hogy minden a_i-re igaz ez.

Rendezzük át egy kicsit az algoritmust:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right), \\
2a_n &= a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}, \\
2a_n - 2\sqrt{A} &= a_{n-1} - \sqrt{A} + \frac{A}{a_{n-1}} - \sqrt{A}, \\
2\left(a_n - \sqrt{A}\right) &= \left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right) + \frac{A - a_{n-1}\sqrt{A}}{a_{n-1}}, \\
2\left(a_n - \sqrt{A}\right) &= \left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right) + \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}}\left(\sqrt{A} - a_{n-1}\right), \\
2\left(a_n - \sqrt{A}\right) &= \left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}}\right), \\
a_n - \sqrt{A} &= \frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}}\right) < \frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right),
\end{aligned}$$

hiszen

$$0 < 1 - \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}} < 1.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$a_2 > a_3 > a_4 > \ldots \sqrt{A} \geq a_1 = 1,$$

valamint a_i távolsága $\sqrt{A}$-tól az előző eltérés felénél is kisebb, azaz egyre közelebb lesz $\sqrt{A}$-hoz.

Akik már tanultak határértéket, azok számára: az a_i sorozat alulról korlátos (egy korlát $\sqrt{A}$) és szigorúan monoton csökken, tehát létezik határértéke, ami legyen H

$$\lim_{x \to \infty} a_n = H.$$

Ekkor erre a határértékre igaz:

$$H = \frac{1}{2}\left(H + \frac{A}{H}\right),$$

amit megoldva

$$H = \sqrt{A}.$$

Geometriai algoritmusok

A teljesség igénye nélkül néhány geometriai algoritmus.

- Háromszög beírt körének megszerkesztése
- Háromszög köréírt körének megszerkesztése
- Háromszög magasságpontjának megszerkesztése
- Szabályos sokszög megszerkesztése

A szerkesztési leírásokat végrehajtva kapjuk meg a várt végeredményt.

Játék algoritmusok

Sok fejtörő játék, feladat megoldása is algoritmikus.

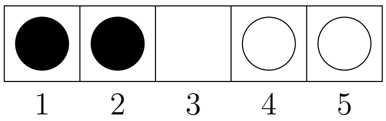
Az első forduló feladatai

Már az első forduló feladatainak kitűzésekor fontos megjegyezni, hogy a sikeres szerepléshez nem kell az összes feladatot megoldani. Az eredményeket az összes forduló teljesítménye alapján és évfolyamonként külön-külön értékeljük.

Az alábbi feladatok többségét nem csak az ismertetett módszerek segítségével lehet megoldani. A versenyben természetesen minden helyes megoldást maximális pontszámmal értékelünk.

Elvileg különböző második megoldásra az eredeti pontszám legfeljebb 50 %-a kapható.

1. Két fekete és két fehér dámafigurát az ábrának megfelelően helyezünk el.

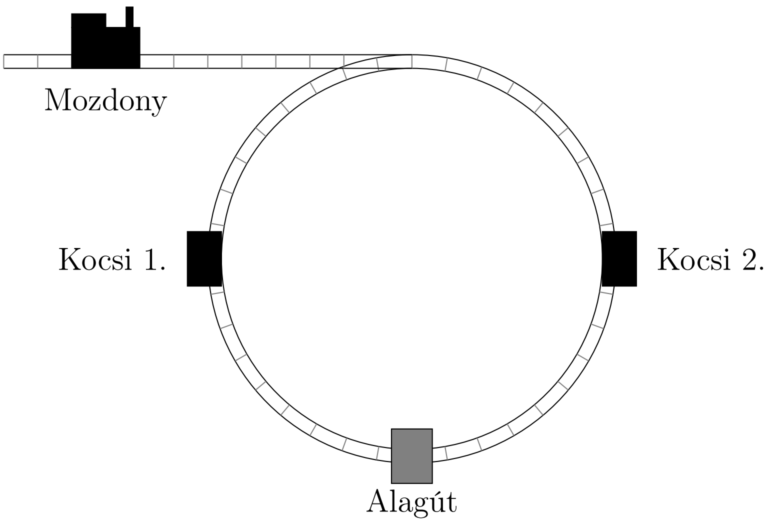


   Az a feladat, hogy a fekete és fehér korongokat felcseréld (tehát az 1, 2 jelű mezőkön álló korongok kerüljenek a 4, 5 jelű mezőkre), az alábbi szabályok betartásával:

   - Fehér figurával kell kezdeni az áthelyezést.
   - Mindegyik figurát csak szomszédos mezőre lehet tenni, vagy egy másik korongot tartalmazó mezőt lehet átugrani (többet nem).
   - Egyik figurát sem lehet visszatenni olyan helyre, ahol már volt.
   - Egy mezőn csak egy figura állhat.

   Adjunk egy megoldási módot! (6 pont)

2. Egy magányos mozdony önmagába visszatérő sínhurokhoz ér, amelyre állítható váltón át lehet behajtani. (Az ábra csak vázlat)



A hurokszakaszon két üres kocsi áll, amelyek között egy alagút található. Az alagúton egy kocsi átfér, de a mozdony már nem, és rövidebb egy vasúti kocsinál. A mozdonyvezetőnek meg kell cserélni a két kocsit úgy, hogy a munka végeztével el tudja hagyni a körpályát. A feladat megoldásának feltétele: a mozdony és a kocsik mindkét végén kapcsoló berendezés van. A vonatokat fékezők kísérik, akik a szükséges szét- és összekapcsolásokat utasításainknak megfelelően elvégzik (csak álló szerelvény esetén). A vasúti járműveket kímélni kell, ezért a kocsikat a mozdony ütközéssel nem guríthatja el, csak vontatással lehet helyet változtatni. (6 pont)

3. Igazoljuk, hogy az Eratosztenészi szita módszer jó, azaz tényleg csak a prímek maradnak vissza. (8 pont)

4. Módosítunk a négyzetgyökvonás Newton-i módszerén a következő módon:

$$a_1 = 1; \text{ és } a_n = \frac{1}{4}\left(3a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right); \ n \geq 2.$$

   a) Bizonyítsuk be, hogy az algoritmus továbbra is $\sqrt{A}$-t adja meg.
   b) Jobb vagy rosszabb lett az algoritmusunk, azaz több vagy kevesebb lépést kell tennünk ugyanolyan pontosság eléréséhez? (10 pont)

5. Módosítunk a négyzetgyökvonás Newton-i módszerén a következő módon:

$$a_1 = 1; \text{ és } a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}^2}\right); \ n \geq 2.$$

   Határozzuk meg, hogy most mit számol ki (ha egyáltalán kiszámol valamit) az algoritmus. (10 pont)

6. Bizonyítsuk be, hogy a „kézi” gyökvonás algoritmusa jó. Végezzük el vele $\sqrt{2022}$ kiszámolását 5 tizedesjegy pontosságra. (10 pont)

Beküldési határidő: 2022. március 6. 23^{59}
Beküldési cím: matoktport@gmail.com
Email tárgy: I. forduló megoldásai

A megoldásokat kérjük egy (1!) levélben beküldeni a könnyebb feldolgozás érdekében. A megoldások csatolás formájában kerüljenek a levélbe, feltétlenül PDF formátumban. A csatolt file neve ékezetek nélküli legyen és tartalmazza a beküldő nevét, továbbá a forduló sorszámát is (esetleg a feladat sorszámát, ha csak 1 feladatot tartalmaz). Szóköz helyett a "_" karakter alkalmazandó! Példák csatolt file nevekre:
gipszjakab_fordulo1.pdf
gipszjakab_fordulo1_feladat01.pdf

Kardos-Montágh Matematikaverseny, 2022.
II. forduló

Rekurzió

A természetes számok halmazán értelmezett függvényt, vagyis a sorozatot általában megadhatjuk explicit módon, azaz megmondjuk azt, hogy egy tetszőleges természetes számhoz mit rendelünk hozzá. Megadhatjuk azonban úgy is, hogy megadjuk az első (néhány) tagját, a további tagokat pedig az előttük levő(k) felhasználásával definiáljuk. A ilyen esetekben azt mondjuk, hogy a sorozatot *rekurzív módon* adtuk meg. Erre tipikus példa a Fibonacci sorozat.

A feladatokban ezt követően gyakran az a cél, hogy adjuk meg a sorozat n-edik tagját zárt alakban.

Megoldási módszerek

Sokszor több úton is meg lehet oldani a feladatokat. Néhány gyakran használt módszer:

Teljes indukció (azaz vegyük észre ...)

Megpróbáljuk kitalálni a végeredményt, majd ezt teljes indukció segítségével igazoljuk. A módszer problémás része a kitalálás.

Teleszkopikus összeg

A keresett összefüggést felírva, majd az index léptetésével 1-ig (illetve a legkisebb értékig) – esetleg megfelelő konstansokkal szorozva – összeadjuk őket. Nézzük erre a következő rekurzív sorozatot (a jól ismert számtani sorozatot):

$$a_1 = 3;\ a_n = a_{n-1} + 2;\ n \geq 2$$

Írjuk fel a tagokat 1-ig:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2, \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2, \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + 2, \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 + 2, \\ a_2 &= a_1 + 2. \end{aligned}$$

A felírt $n-1$ egyenletet összeadva és az egyforma tagokat elvéve kapjuk, hogy

$$a_n = a_1 + 2(n-1),$$

ami a konkrét esetben:

$$a_n = 3 + 2(n-1) = 1 + 2n.$$

Teleszkopikus szorzat

A keresett összefüggést felírva, majd az index léptetésével 1-ig (illetve a legkisebb értékig) – esetleg megfelelő konstansokkal szorozva – összeszorozzuk őket. Nagyon fontos ezen módszernél arról meggyőződni, hogy nincs a felírt összefüggések között nulla értékű sor. Nézzük erre a következő rekurzív sorozatot (a jól ismert mértani sorozatot):

$$a_1 = 3;\ a_n = 2a_{n-1};\ n \geq 2.$$

Írjuk fel a tagokat 1-ig:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1}, \\ a_{n-1} &= 2a_{n-2}, \\ a_{n-2} &= 2a_{n-3}, \\ &\dots \\ a_3 &= 2a_2, \\ a_2 &= 2a_1. \end{aligned}$$

A felírt $n-1$ egyenletet összeszorozva (figyelve arra, hogy egyik sorban sincs 0 szorzó) és az egyforma (nemnulla) tagokkal elosztva kapjuk, hogy

$$a_n = 2^{n-1} \cdot a_1,$$

ami a konkrét esetben:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Index léptetése

Index le (esetleg fel) léptetésével és az eredeti összefüggés felhasználásával egy „kezesebb” sorozat kialakítása.

Új sorozat (új ismeretlen) bevezetése

Mint az elnevezés mutatja, egy „kezesebb” sorozat elérése a cél. Nézzük erre a következő rekurzív sorozatot:

$$a_1 = 1;\ a_n = 3a_{n-1} + 2;\ n \geq 2.$$

Alakítsuk át a képzési szabályt és adja magár az új sorozat létrehozása

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2, \qquad / + 1 \\ a_n + 1 &= 3a_{n-1} + 3, \\ a_n + 1 &= 3\left(a_{n-1} + 1\right), \\ b_n = a_n + 1;\ b_1 &= a_1 + 1 = 2; \\ b_n &= 3b_{n-1}. \end{aligned}$$

Ez egy mértani sorozat, aminek a zárt alakja

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1},$$

és innen

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1.$$

Egy feladatban akár több módszer egymás utáni vagy akár egyidejű alkalmazása is lehetséges. Természetesen más megoldási módszerek is léteznek, a felsoroltak a leggyakrabban alkalmazottak.

Lineáris másodrendű rekurzió

A rekurzió általános alakja (vagy erre az alakra hozható):

$$a_1 = A;\ a_2 = B;\ a_n = C_1 \cdot a_{n-1} + C_2 \cdot a_{n-2};\ n \geq 3;\quad \text{és } A;\ B;\ C_1;\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

A rekurzióhoz tartozó másodfokú egyenlet:

$$q^2 = C_1 \cdot q + C_2,$$

és ennek gyökei legyenek q_1 és q_2.

Ha $q_1 \neq q_2$, akkor a sorozat általános megoldása

$$a_n = K_1 \cdot q_1^{n-1} + K_2 \cdot q_2^{n-1}; \qquad K_1;\ K_2 \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol K_1 és K_2 a sorozat első két tagjából kiszámolható, az

$$\begin{cases} a_1 & = K_1 \cdot q_1^{1-1} + K_2 \cdot q_2^{1-1} = K_1 + K_2 \\ a_2 & = K_1 \cdot q_1^{2-1} + K_2 \cdot q_2^{2-1} = K_1 \cdot q_1 + K_2 \cdot q_2 \end{cases}$$

egyenletrendszert megoldva.

Ha $q_1 = q_2$, akkor az általános megoldása

$$a_n = K_1 \cdot q_1^{n-1} + K_2 \cdot q_1^{n-1} \cdot n; \qquad K_1;\ K_2 \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol K_1 és K_2 szintén a sorozat első két tagjából kiszámolható, az

$$\begin{cases} a_1 & = K_1 \cdot q_1^{1-1} + K_2 \cdot q_1^{1-1} \cdot 1 = K_1 + K_2 \\ a_2 & = K_1 \cdot q_1^{2-1} + K_2 \cdot q_1^{2-1} \cdot 2 = K_1 \cdot q_1 + 2 \cdot K_2 \cdot q_1 \end{cases}$$

egyenletrendszert megoldva.

Nézzünk egy konkrét példát!

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2};\quad n \geq 3;\quad a_1 = 7;\quad a_2 = 17;$$

$$q^2 = 5q - 6 \qquad \Rightarrow \qquad q_1 = 2;\ q_2 = 3,$$

$$a_n = K_1 \cdot 2^{n-1} + K_2 \cdot 3^{n-1}.$$

$$\begin{cases} 7 = 2K_1 + 3K_2 \\ 17 = 4K_1 + 9K_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad K_1 = 2,\ K_2 = 1,$$

$$a_n = 2^n + 3^{n-1}.$$

Kardos Montágh
Matematikaverseny

A második forduló feladatai

A sikeres szerepléshez nem kell az összes feladatot megoldani. Az eredményeket az összes forduló teljesítménye alapján és évfolyamonként külön-külön értékeljük.

Az alábbi feladatok többségét nem csak az ismertetett módszerek segítségével lehet megoldani. A versenyben természetesen minden helyes megoldást maximális pontszámmal értékelünk. Elvileg különböző második megoldásra az eredeti pontszám legfeljebb 50 %-a kapható.

7. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n - 3; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1 \qquad \text{(6 pont)}$$

8. Hány 5-tel osztható szám van a sorozat első 100 tagja között?

$$a_n = a_{n-1} + n^2, \quad n \geq 2; \quad a_1 = 1 \qquad \text{(6 pont)}$$

9. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n^2 - 6n + 3; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1 \qquad \text{(8 pont)}$$

10. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$na_n = (2n-2)\,a_{n-1} - (n-2)\,a_{n-2}; \quad n \geq 3; \qquad a_1 = 5; \qquad a_2 = 4 \qquad \text{(10 pont)}$$

11. Bizonyítsuk be, hogy $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_k^2 < 1$, ha

$$0 < a_1 < 1; \qquad a_n = a_{n-1} - a_{n-1}^2; \quad n \geq 2; \qquad \text{(10 pont)}$$

12. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}}{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}, \quad n \geq 3; \quad a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{3} \qquad \text{(10 pont)}$$

Beküldési határidő: 2022. március 27. 23^{59}
Beküldési cím: matoktport@gmail.com
Email tárgy: II. forduló megoldásai

A megoldásokat kérjük egy (1!) levélben beküldeni a könnyebb feldolgozás érdekében. A megoldások csatolás formájában kerüljenek a levélbe, kizárólag PDF formátumban. A csatolt file neve ékezetek nélküli legyen és tartalmazza a beküldő nevét, továbbá a forduló sorszámát is (esetleg a feladat sorszámát, ha csak 1 feladatot tartalmaz). Szóköz helyett a "_" karakter alkalmazandó! Példák csatolt file nevekre:
gipszjakab_fordulo2.pdf
gipszjakab_fordulo2_feladat08.pdf

Kardos-Montágh Matematikaverseny, 2022.

III. forduló

A sikeres szerepléshez nem kell az összes feladatot megoldani. Az eredményeket az összes forduló teljesítménye alapján és évfolyamonként külön-külön értékeljük.

Elvileg különböző második megoldásra az eredeti pontszám legfeljebb 50 %-a kapható.

13. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$a_n = 2a_{n-1} + 3^{n-1}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 2 \qquad \text{(6 pont)}$$

14. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$a_n = (n-1)\,a_{n-1} + n^2 - 3n + 1; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1 \qquad \text{(6 pont)}$$

15. Határozzuk meg a_n-t zárt alakban!

$$a_n = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{(n+4)\,(n+3)\,(n+2)}\,(a_{n-1}+1)\,; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 0 \qquad \text{(8 pont)}$$

16. Igazoljuk, hogy a sorozat racionális számokból áll.

$$a_n = \frac{1}{16}\left(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1 + 24a_{n-1}}\right); \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 1 \qquad \text{(10 pont)}$$

17. Határozzuk meg a_n-t és b_n-t zárt alakban!

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \\ b_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{cases} \qquad n \geq 2; \qquad a_1 = 2; \qquad b_1 = 0 \qquad \text{(10 pont)}$$

18. Igazoljuk, hogy a sorozat egész számokból áll.

$$na_n = 2\,(2n-1)\,a_{n-1}; \quad n \geq 2; \qquad a_1 = 2 \qquad \text{(10 pont)}$$

Beküldési határidő: 2022. április 10. 23^{59}
Beküldési cím: matoktport@gmail.com
Email tárgy: III. forduló megoldásai

A megoldásokat kérjük egy (1!) levélben beküldeni a könnyebb feldolgozás érdekében. A megoldások csatolás formájában kerüljenek a levélbe, kizárólag PDF formátumban. A csatolt file neve ékezetek nélküli legyen és tartalmazza a beküldő nevét, továbbá a forduló sorszámát is (esetleg a feladat sorszámát, ha csak 1 feladatot tartalmaz). Szóköz helyett a "_" karakter alkalmazandó! Példák csatolt file nevekre:
gipszjakab_fordulo3.pdf
gipszjakab_fordulo3_feladat13.pdf

Megoldások

A közölt megoldások a diákok által adott megoldások alapján készültek. A diákok által írtakhoz képest végzett változtatások a lényeget nem érintik, általában csak stilisztikai jellegűek.

1. feladat

Balázs Bálint (2022B) megoldása alapján

Jelöljük a korongokat rendre az a, b, c, és d betűkkel, a mezőket pedig rendre az 1, 2, 3, 4 és 5 számokkal jelölve az alábbi ábra szerint:

a	b		c	d
1	2	3	4	5

A cél, hogy a végső állásban a fehér korongok helyén feketék legyenek, a fekete korongok helyén pedig fehérek. Ennek megfelelően a végső állás a következők közül kerülhet ki:

c	d		a	b
1	2	3	4	5

c	d		b	a
1	2	3	4	5

d	c		a	b
1	2	3	4	5

d	c		b	a
1	2	3	4	5

Jelöljünk egy lépést egy betű és egy szám kombinációjaként – például: c3

- a betű megmutatja, melyik bábuval lépünk (ez egyértelmű, hiszen egy c jelű korong van csak),
- a szám pedig meghatározza, melyik mezőre lépünk (ez is egyértelmű, mivel pontosan egy mezőt jelöltünk 3-mal).

A fenti lépés tehát azt jelenti, a c jelű koronggal lépünk a 3-as számú mezőre.

Az alábbi, a feladat feltételeinek megfelelő lépéssorozatokat találtam:

1. megoldás: c3; b4; c2; d3; b5; d4; a3; c1; d2; a4.
2. megoldás: c3; b4; c2; a3; c1; a2; d3; b5; a4; d2.
3. megoldás: d3; c5; b4; a2; d1; c3; b5; d4; c2.
4. megoldás: d3; c5; b4; d2; a3; d1; a2; c3; b5; d4; c3.
5. megoldás: d3; c5; d4; b3; d2; b4; a3; d1; a2; c3; b5; a4; c2.
6. megoldás: c3; b4; a2; c1; d3; b5; a4; d2.

Ezek mind megoldásai a feladatnak.

Megjegyzés A feladatnak valójában 16 megoldása van, amit a 44. oldalon található program mutat meg.

2. feladat

Móricz Nádja (2023D) megoldása alapján

Egy lehetséges megoldás a következő, a leírás a „Mozdony” szemszögéből tekintve:

- Betolja „Kocsi 2”-t az alagútba.
- Betolja (a másik oldalon) „Kocsi 1”-t az alagútba, rákapcsolódik „Kocsi 2”-re és az egészet kihúzza az alagútból, majd rátolja őket az induló üres vágányra.
- Szétkapcsolja a kocsikat és csak a „Kocsi 1”-et kihúzza az üres vágányról majd betolja az alagútba.
- Átmegy „Kocsi 1” másik oldalára (körbemegy) és kihúzza az eredetileg „Kocsi 2” helyére.
- Visszamegy „Kocsi 2”-höz és kihúzza az üres vágányról majd betolja „Kocsi 1” eredeti helyére és készen van.

3. feladat

Xiong Benjamin Victor (2023B) megoldása alapján

Legyen $\left[\sqrt{N}\right] = n$. Ekkor
$$n^2 \leq N < (n+1)^2$$

Tegyük fel, hogy az 1-től N-ig felírt számok estében már végigmentünk az n-nél nem nagyobb számokon és többszöröseiken és kihúztuk őket már.

Vegyük az első, ki nem húzott számot a táblázatban, legyen ez $n+a$, ahol $n+a \leq N$ és $a \in \mathbb{N}^+$. Mivel ezt eddig nem húztuk ki, ezért nincs 2-től $(n+a)-1$-ig osztója, azaz ez biztosan prím. Ugyanakkor
$$(n+a)^2 \geq (n+1)^2 > N$$
tehát egyetlen többszöröse sincs N-ig, amelyiket ne húztunk volna ki. Ezután vegyük a következő még ki nem húzott számot. A leírtak igazak a többi, megmaradt számokra is. Ezzel igazoltuk, hogy jó az algoritmus.

4. feladat

Szigeti Péter (2022D) megoldása alapján

a) rész megoldása

Írjuk fel a számtani-mértani egyenlőtlenséget a pozitív $3a_{n-1}$ és $\dfrac{A}{a_{n-1}}$ számokra

$$\frac{3a_{n-1} + \dfrac{A}{a_{n-1}}}{2} \geq \sqrt{3a_{n-1} \cdot \frac{A}{a_{n-1}}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{A}$$

azaz ha $n \geq 2$, akkor

$$2a_n = \frac{3a_{n-1} + \dfrac{A}{a_{n-1}}}{2} \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{A},$$

$$a_n \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{A},$$

tehát az a_n sorozat ($n \geq 2$ esetén) alulról korlátos.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{4}\left(3a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right), \\
4a_n &= \left(3a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right), \\
4a_n - 4\sqrt{A} &= \left(3a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right) - 4\sqrt{A}, \\
4(a_n - \sqrt{A}) &= 3\left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right) + \frac{A - a_{n-1}\sqrt{A}}{a_{n-1}}, \\
4(a_n - \sqrt{A}) &= 3\left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right) + \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}}(\sqrt{A} - a_{n-1}), \\
4(a_n - \sqrt{A}) &= \left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right)\left(3 - \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}}\right), \\
(a_n - \sqrt{A}) &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right)\left(3 - \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}}\right) < \frac{3}{4}\left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right).
\end{aligned}$$

Előfordulhat, hogy

$$3 - \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}} < 0.$$

Ebben az esetben az első lépés (amikor $a_1 = 1$) esetén

$$a_2 = \frac{1}{4}(3 + A) = \frac{3 + A}{4} = \frac{(\sqrt{A} - 1)(\sqrt{A} - 3)}{4} + \sqrt{A} > \sqrt{A},$$

azaz a 2. tagtól kezdve lesz csak igaz, hogy

$$3 - \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}} < 3.$$

Kaptuk, hogy az a_n sorozat eltérése $\sqrt{A}$-tól egyre csökken.

A sorozat tehát alulról korlátos, szigorúan monoton csökkenő, azaz létezik határértéke.

Legyen

$$\lim_{n \to \infty} a_n = H.$$

Ekkor

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3a_n + \frac{A}{a_n}\right),$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{4}\left(3H + \frac{A}{H}\right), \\
4H &= \left(3H + \frac{A}{H}\right), \\
H &= \frac{A}{H}, \\
H^2 &= A.
\end{aligned}
$$

Figyelembe véve, hogy a sorozat tagjai pozitív számok, kapjuk, hogy

$$H = \sqrt{A}.$$

b) rész megoldása

Az eredeti Newton algoritmus gyorsabb, mint a módosított, mivel a $\frac{3}{4}$-es szorzó miatt lassabban közelíti a sorozat $\sqrt{A}$-t (programmal is teszteltem).

5. feladat

Csontos András (2022D) megoldása alapján

Írjuk fel a számtani-mértani egyenlőtlenséget a pozitív $\frac{a_{n-1}}{2}$ (2 darab) és $\frac{A}{a_{n-1}^2}$ számokra:

$$\frac{\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{A}{a_{n-1}^2}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a_{n-1}}{2} \cdot \frac{a_{n-1}}{2} \cdot \frac{A}{a_{n-1}^2}} = \sqrt[3]{\frac{A}{4}},$$

$$a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}^2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{A}{4}},$$

azaz ha $n \geq 2$, akkor

$$2a_n \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{A}{4}}.$$

$$a_n \geq \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{A}{4}},$$

tehát az a_n sorozat ($n \geq 2$ esetén) alulról korlátos.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}^2}\right), \\
2a_n &= \left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}^2}\right), \\
2a_n - 2\sqrt[3]{A} &= \left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}^2}\right) - 2\sqrt[3]{A}, \\
2\left(a_n - \sqrt[3]{A}\right) &= \left(a_{n-1} - \sqrt[3]{A}\right) + \frac{A - a_{n-1}^2\sqrt[3]{A}}{a_{n-1}^2},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
2\left(a_n-\sqrt[3]{A}\right) &= \left(a_{n-1}-\sqrt[3]{A}\right)+\frac{\sqrt[3]{A}}{a_{n-1}^2}(\sqrt[3]{A^2}-a_{n-1}^2),\\
2\left(a_n-\sqrt[3]{A}\right) &= \left(a_{n-1}-\sqrt[3]{A}\right)\left(1-\frac{\sqrt[3]{A}}{a_{n-1}^2}\left(\sqrt[3]{A}+a_{n-1}\right)\right),\\
\left|a_n-\sqrt[3]{A}\right| &= \frac{1}{2}\left|a_{n-1}-\sqrt[3]{A}\right|\left|1-\frac{\sqrt[3]{A}}{a_{n-1}^2}\left(\sqrt[3]{A}+a_{n-1}\right)\right|,\\
\left|a_n-\sqrt[3]{A}\right| &\approx \frac{1}{2}\left|a_{n-1}-\sqrt[3]{A}\right|\left|1-2\right|,\\
\left|a_n-\sqrt[3]{A}\right| &\approx \frac{1}{2}\left|a_{n-1}-\sqrt[3]{A}\right|.
\end{aligned}$$

Kaptuk, hogy az a_n sorozat eltérése $\sqrt[3]{A}$-tól egyre csökken, de az előjele változik (azaz egyszer kisebb, egyszer nagyobb).

A sorozat tehát alulról korlátos, szigorúan monoton csökkenő, azaz létezik határértéke.

Legyen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = H.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{A}{a_n^2}\right),\\
H &= \frac{1}{2}\left(H+\frac{A}{H^2}\right),\\
2H &= H+\frac{A}{H^2},\\
H &= \frac{A}{H^2},\\
H^3 &= A,\\
H &= \sqrt[3]{A}.
\end{aligned}$$

6. feladat

Csontos András (2022D) megoldása alapján

Legyen

$$\sqrt{n} = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_k},$$

$$\sqrt{n} = a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+a_3\cdot 10^{k-3}+\ldots+a_k,$$

azaz

$$n = \left(a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+a_3\cdot 10^{k-3}+\ldots+a_k\right)^{\cdot}$$

Több tag négyzetre emelésekor minden tag négyzete és bármely két tag kétszeres szorzata megjelenik.

$$\begin{aligned}
n &= \left(a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+a_3\cdot 10^{k-3}+\ldots+a_k\right)^2 =\\
&= \sum a_i^2\cdot 10^{2k-2i}+\sum 2\cdot a_i\cdot a_j\cdot 10^{2k-i-j}.
\end{aligned}$$

A négyzetre emelést elvégezve csoportosítjuk a keletkező tagokat:

$$\begin{aligned}
n = & a_1^2 \cdot 10^{2k-2} + \\
& + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot 10^{2k-3} + a_2^2 \cdot 10^{2k-4} + \\
& + 2 \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot 10^{2k-4} + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot 10^{2k-5} + a_3^2 \cdot 10^{2k-6} + \\
& + 2 \cdot a_1 \cdot a_4 \cdot 10^{2k-5} + 2 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot 10^{2k-6} + 2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot 10^{2k-7} + a_4^2 \cdot 10^{2k-8} + \\
& \ldots
\end{aligned}$$

Megfelelő hatványokat és szorzókat kiemelve:

$$\begin{aligned}
n = & a_1^2 \cdot 10^{2k-2} + & (1)\\
& + \left(2a_1 \cdot 10^1 + a_2\right) \cdot a_2 \cdot 10^{2k-4} + & (2)\\
& + \left(2a_1 \cdot 10^2 + 2a_2 \cdot 10^1 + a_3\right) \cdot a_3 \cdot 10^{2k-6} + & (3)\\
& + \left(2a_1 \cdot 10^3 + 2a_2 \cdot 10^2 + 2a_3 \cdot 10^1 + a_4\right) \cdot a_4 \cdot 10^{2k-8} & (4)\\
& \ldots
\end{aligned}$$

Ha folytatnánk a leírást, látható, hogy mindegyik számnak szerepel a négyzete és bármely két számnak szerepel a kétszeres szorzata. Innen az algoritmus leolvasható:

- Az első értékes jegyet megbecsüljük, (1) jelzésű sor, a_1 a jegy.
- Az eddig leírt jegyeket (helyiérték szerint a_1) kétszerezzük, majd megbecsüljük a következő jegyet úgy, hogy mögé írjuk és ezzel szorzunk is (2) jelzésű sor, a_2 a jegy.
- Az eddig leírt jegyeket (helyiérték szerint a_1 és a_2) kétszerezzük, majd megbecsüljük a következő jegyet úgy, hogy mögé írjuk és ezzel szorzunk is (3) jelzésű sor, a_3 a jegy.
- Az eddig leírt jegyeket (helyiérték szerint a_1, a_2 és a_3) kétszerezzük, majd megbecsüljük a következő jegyet úgy, hogy mögé írjuk és ezzel szorzunk is (4) jelzésű sor, a_4 a jegy.

És ez így folytatható tovább. A megfelelő 10 hatványok csak a helyiértékeket állítják be.

Algoritmus alkalmazása $\sqrt{2022}$ meghatározására (irodalmi érték: $44,9666543118\ldots$):

```
2022 => 44,96665
 422
  8600
   59900
    598400
     5884400
      48844400
```

7. feladat

Index léptetéses megoldás

Index léptetést végrehajtva:

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \cdot a_{n-1} + 2n - 3, \\ a_{n+1} &= 3 \cdot a_n + 2(n+1) - 3 = 3 \cdot a_n + 2n - 1, \end{aligned}$$

majd vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 3 \cdot a_n - 3 \cdot a_{n-1} + 2, \\ a_{n+1} &= 4 \cdot a_n - 3 \cdot a_{n-1} + 2. \end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva ismét:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4 \cdot a_n - 3 \cdot a_{n-1} + 2, \\ a_{n+2} &= 4 \cdot a_{n+1} - 3 \cdot a_n + 2. \end{aligned}$$

Most ismét vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= 4 \cdot a_{n+1} - 4 \cdot a_n - 3 \cdot a_n + 3 \cdot a_{n-1}, \\ a_{n+2} &= 5 \cdot a_{n+1} - 7 \cdot a_n + 3 \cdot a_{n-1}. \end{aligned}$$

A rekurziós összefüggést megoldva:

$$r^3 - 5r^2 + 7r - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1;\ r_2 = 1;\ r_3 = 3.$$

Az általános megoldás (figyelembe véve, hogy van két egyforma gyök):

$$a_n = K_1 \cdot 1^{n-1} + K_2 \cdot n \cdot 1^{n-1} + K_3 \cdot 3^{n-1} = K_1 + n \cdot K_2 + K_3 \cdot 3^{n-1}.$$

Az első három tag felhasználásával számolva a konstansokat:

$$\begin{cases} a_1 = 1 = K_1 + K_2 + K_3, \\ a_2 = 4 = K_1 + 2K_2 + 3K_3, \\ a_3 = 15 = K_1 + 3K_2 + 9K_3. \end{cases}$$

$$K_1 = 0; \qquad K_2 = -1; \qquad K_3 = 2,$$

és így a sorozatunk általános alakja:

$$a_n = 0 + n \cdot (-1) + 2 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^n - n.$$

Móricz Abigél (2022A) megoldása alapján

A sorozat elemeit számolva: a_1 =1; a_2 =4; a_3 =15; a_4 =50; a_5 =157.
Az a gyanú erősödik meg, hogy mintha háromszorozódnának az egymás utáni számok, ezért itt keresgélve kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = 3^n - 3^{n-1} - n.$$

Ezt igazoljuk teljes indukcióval!

I. rész
Ellenőrízzük a sejtésünket. Ez megtörtént, amikor az első 5 tagot kiszámoltuk.

II. rész
Tegyük fel, hogy valamely k-ig minden értékre igaz a sejtésünk.

$$a_k = 3^k - 3^{k-1} - k.$$

III. rész
Tekintsük végül akkor $n = k + 1$-re, hogy mit kapunk:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 3a_k + 2(k+1) - 3 = 3\left(3^k - 3^{k-1} - k\right) + 2k + 2 - 3 = \\ &= 3 \cdot 3^k - 3 \cdot 3^{k-1} - 3k + 2k - 1 = 3^{k+1} - 3^k - (k+1) \\ a_{k+1} &= 3^{k+1} - 3^k - (k+1). \end{aligned}$$

Pontosan ezt akartuk bizonyítani. Ez pedig tulajdonképpen:

$$a_n = 3^n - 3^{n-1} - n = 3 \cdot 3^{n-1} - 3^{n-1} - n = 2 \cdot 3^{n-1} - n.$$

Pap Tamás (2024A) megoldása alapján

Rendezzük át egy kicsit az összefüggésünket és vezessünk be egy új sorozatot:

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n - 3, \qquad\qquad / + n \\ a_n + n &= 3a_{n-1} + 3n - 3, \\ a_n + n &= 3\left(a_{n-1} + n - 1\right), \end{aligned}$$

Új sorozatot bevezetve:

$$b_n = a_n + n; \qquad b_1 = a_1 + 1 = 2,$$
$$b_n = 3 \cdot b_{n-1}.$$

Ez egy „sima” mértani sorozat, melynek általános tagja:

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1},$$

és így az eredeti a_n sorozatra:

$$a_n = b_n - n,$$
$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - n.$$

8. feladat

Fehér Anna (2023B) megoldása alapján

Számoljuk ki a sorozat elemeit és közben nézzük, hogy mekkora ötös maradékot adnak.

n	Elem	Ötös maradék
1	$a_1 = 1$	1
2	$a_2 = 5$	0
3	$a_3 = 14$	4
4	$a_4 = 30$	0
5	$a_5 = 55$	0
6	$a_6 = 91$	1
7	$a_7 = 140$	0
8	$a_8 = 204$	4
9	$a_9 = 285$	0
10	$a_{10} = 385$	0

Nyilvánvaló, hogy ismétlődnek a maradékok.

Az ismétlődés hossza 5, és ezek között 3 darab 0-s maradék van. 20 ilyen ötös csaport van, tehát összesen

$$20 \cdot 3 = 60$$

öttel osztható szám van.

Gao Ádám (2023A) megoldása alapján

Végezzünk teleszkópikus összeadást:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + n^2,\\
a_{n-1} &= a_{n-2} + (n-1)^2,\\
a_{n-2} &= a_{n-3} + (n-2)^2,\\
&\dots\\
a_3 &= a_2 + 3^2,\\
a_2 &= a_1 + 2^2,\\
a_1 &= 1 = 1^2.
\end{aligned}$$

Adjuk össze a sorokat:

$$a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Így a_n osztási maradéka megegyezik $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ osztási maradékával.

Mivel n; $n+1$ és $2n+1$ relatív prímek, ezért ezek egyik osztható 5-tel, amennyiben a_n ozsztható 5-tel.

Ez külön-külön 20 alkalommal fordul elő ($1 \leq n \leq 100$), tehát összesen $3 \cdot 20 = 60$ esetben lesz a_n osztható 5-tel.

Szigeti Péter (2022D) megoldása alapján

Egy egyszerű programmal előállította a számokat és megszámolta az 5-tel osztható számokat, végeredményül 60-at kapott.

A táblázatban szerepel n; a_n és az 5-tel való osztási maradék. Amennyiben ez 0, azt a legjobb oldali oszlopban számoljuk.

n	a_n	Mar.	Db
1	1	1	
2	5	0	1
3	14	4	
4	30	0	2
5	55	0	3
6	91	1	
7	140	0	4
8	204	4	
9	285	0	5
10	385	0	6
11	506	1	
12	650	0	7
13	819	4	
14	1015	0	8
15	1240	0	9
16	1496	1	
17	1785	0	10
18	2109	4	
19	2470	0	11
20	2870	0	12
21	3311	1	
22	3795	0	13
23	4324	4	
24	4900	0	14
25	5525	0	15
26	6201	1	
27	6930	0	16
28	7714	4	
29	8555	0	17
30	9455	0	18
31	10416	1	
32	11440	0	19
33	12529	4	

n	a_n	Mar.	Db
34	13685	0	20
35	14910	0	21
36	16206	1	
37	17575	0	22
38	19019	4	
39	20540	0	23
40	22140	0	24
41	23821	1	
42	25585	0	25
43	27434	4	
44	29370	0	26
45	31395	0	27
46	33511	1	
47	35720	0	28
48	38024	4	
49	40425	0	29
50	42925	0	30
51	45526	1	
52	48230	0	31
53	51039	4	
54	53955	0	32
55	56980	0	33
56	60116	1	
57	63365	0	34
58	66729	4	
59	70210	0	35
60	73810	0	36
61	77531	1	
62	81375	0	37
63	85344	4	
64	89440	0	38
65	93665	0	39
66	98021	1	

n	a_n	Mar.	Db
67	102510	0	40
68	107134	4	
69	111895	0	41
70	116795	0	42
71	121836	1	
72	127020	0	43
73	132349	4	
74	137825	0	44
75	143450	0	45
76	149226	1	
77	155155	0	46
78	161239	4	
79	167480	0	47
80	173880	0	48
81	180441	1	
82	187165	0	49
83	194054	4	
84	201110	0	50
85	208335	0	51
86	215731	1	
87	223300	0	52
88	231044	4	
89	238965	0	53
90	247065	0	54
91	255346	1	
92	263810	0	55
93	272459	4	
94	281295	0	56
95	290320	0	57
96	299536	1	
97	308945	0	58
98	318549	4	
99	328350	0	59
100	338350	0	60

9. feladat

Balázs Bálint (2022B) megoldása alapján

Alakítsuk át a sorozat képzési szabályát!

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n^2 - 6n + 3, \qquad\qquad / + n^2 \\ a_n + n^2 &= 3a_{n-1} + 3n^2 - 6n + 3, \\ a_n + n^2 &= 3\left[a_{n-1} + (n-1)^2\right]. \end{aligned}$$

Vezessünk be új sorozatot

$$b_n = a_n + n^2; \qquad b_1 = a_1 + 1^2 = 2.$$

Ekkor a képzési szabály

$$b_n = 3b_{n-1}$$

alakot vesz fel, ami egy „sima” mértani sorozat, melynek az általános tagja

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Innen az eredeti sorozat:

$$\begin{aligned} a_n = b_n - n^2 &= 2 \cdot 3^{n-1} - n^2, \\ a_n &= 2 \cdot 3^{n-1} - n^2. \end{aligned}$$

10. feladat

Fehér Anna (2023B) megoldása alapján

Rendezzük egy kicsit a képzési szabályt

$$\begin{aligned} na_n &= (2n-2)\, a_{n-1} - (n-2)\, a_{n-2}, \\ na_n &= 2\,(n-1)\, a_{n-1} - (n-2)\, a_{n-2}. \end{aligned}$$

Vezessünk be új sorozatot:

$$b_n = na_n; \qquad b_1 = 1 \cdot a_1 = 5; \qquad b_2 = 2 \cdot a_2 = 8.$$

Ekkor a képzési szabály

$$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}$$

alakot vesz fel. A rekurziós összefüggést megoldva

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = r_2 = 1.$$

Így a sorozat általános alakja (figyelembe véve, hogy két egyforma gyök van):

$$b_n = K_1 \cdot 1^{n-1} + K_2 \cdot n \cdot 1^{n-1} = K_1 + K_2 \cdot n.$$

Az első két elem felhasználásával számolva a konstansokat:

$$\begin{cases} b_1 = 5 = K_1 + K_2, \\ b_2 = 8 = K_1 + 2K_2, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 2; \qquad K_2 = 3,$$

$$\begin{aligned} b_n &= 3n + 2 = na_n, \\ a_n &= \frac{3n+2}{n} = 3 + \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Vegyük észre megoldás

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = 5$; $a_2 = 4$; $a_3 = \frac{11}{3}$; $a_4 = \frac{7}{2}$; $a_5 = \frac{17}{5}$.
Itt feltűnhet, hogy a 3. tag nevezője 3, az 5. tag nevezője 5. Ekkor írjunk minden kiszámolt tagot a sorszámnak megfelelő nevezőre:

$$a_1 = \frac{5}{1};\ a_2 = \frac{8}{2};\ a_3 = \frac{11}{3};\ a_4 = \frac{14}{4};\ a_5 = \frac{17}{5};$$

Itt már látszik a „szépség”, hogy a számlálók ekkor hármasával nőnek. Sejtés:

$$a_n = \frac{3n+2}{n} = 3 + \frac{2}{n}.$$

Ezt igazoljuk teljes indukcióval!

I. rész
Ellenőrízzük az elsőre a sejtésünket. Ez megtörtént, amikor az első 5 tagot kiszámoltuk.

II. rész
Tegyük fel, hogy valamely k-ig minden értékre igaz a sejtésünk.

$$a_k = \frac{3k+2}{k}.$$

III. rész
Nézzük most már $n = k+1$-re, hogy mit kapunk:

$$\begin{aligned}(k+1)a_{k+1} &= 2ka_k - (k-1)a_{k-1} = 2k \cdot \frac{3k+2}{k} - (k-1) \cdot \frac{3(k-1)+2}{k-1} = \\ &= 2(3k+2) - (3k-1) = 6k + 4 - 3k + 1 = 3k + 5 = 3(k+1) + 2 \\ &= (k+1) \cdot \frac{3(k+1)+2}{k+1}.\end{aligned}$$

$$a_{k+1} = \frac{3(k+1)+2}{k+1}.$$

És ezt akartuk bizonyítani.

11. feladat

Csontos András (2022D) megoldása alapján

Nézzük a sorozat n. elemét. Becsüljük meg felülről:

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-1}^2 = a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1}) < a_{n-1} \cdot (1 - 0) = a_{n-1}.$$

Másik oldalról becsülve:

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-1}^2 = a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1}) > 0.$$

Kaptuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots,$$

és mindig pozitív, azaz

$$0 < a_n < 1.$$

Indítsunk a sorozatra egy teleszkópikus összeget:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} - a_{n-1}^2, \\ a_{n-1} &= a_{n-2} - a_{n-2}^2, \\ a_{n-2} &= a_{n-3} - a_{n-3}^2, \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 - a_2^2, \\ a_2 &= a_1 - a_1^2. \end{aligned}$$

A sorokat összeadva és mind a két oldalon előforduló tagokat kivonva kapjuk:

$$a_n = a_1 - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2).$$

Kicsit rendezve:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_1 - a_n,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_1 - a_n < a_1 < 1.$$

És ezt akartuk bizonyítani.

12. feladat

Xiong Benjamin Victor (2023B) megoldása alapján

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{1}{5}$; $a_4 = \frac{1}{9}$; $a_5 = \frac{1}{17}$
.

Feltűnik, hogy minden kiszámolt esetben a számláló 1. Ez adja az ötletet, vezessünk be új sorozatot:

$$a_n = \frac{1}{b_n}; \qquad b_1 = 2;\ b_2 = 3.$$

A sorozat képzési szabálya így:

$$\frac{1}{b_n} = \frac{\frac{1}{b_{n-1}} \cdot \frac{1}{b_{n-2}}}{3\frac{1}{b_{n-2}} - 2\frac{1}{b_{n-1}}} = \frac{1}{3b_{n-1} - 2b_{n-2}},$$

$$b_n = 3b_{n-1} - 2b_{n-2}.$$

A rekurziós összefüggést megoldva:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1;\ r_2 = 2,$$

$$b_n = K_1 \cdot 1^{n-1} + K_2 \cdot 2^{n-1}.$$

Az első két elem felhasználásával számolva a konstansokat:

$$\begin{cases} b_1 = 2 = K_1 + K_2 \\ b_2 = 3 = K_1 + 2K_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 1; \qquad K_2 = 1,$$

és így a b_n sorozat

$$b_n = 2^{n-1} + 1.$$

Az eredeti sorozat pedig:

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2^{n-1}+1}.$$

Vegyük észre megoldás

A sorozat elemeit számolva: $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{1}{5}$; $a_4 = \frac{1}{9}$; $a_5 = \frac{1}{17}$.
A nevezőben szereplő számok mindig egy kettő hatványnál eggyel nagyobb számok, azaz az a sejtés alakul ki, hogy a sorozatra:

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}+1}.$$

Ezt igazoljuk teljes indukcióval!

I. rész
Ellenőrízzük az elsőre a sejtésünket. Ez megtörtént, amikor az első 5 tagot kiszámoltuk.

II. rész
Tegyük fel, hogy valamely k-ig minden értékre igaz a sejtésünk.

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}+1}.$$

III. rész
Nézzük most meg $n = k+1$-re, hogy mit kapunk:

$$a_{k+1} = \frac{a_k \cdot a_{k-1}}{3a_{k-1} - 2a_k} = \frac{\frac{1}{2^{k-1}+1} \cdot \frac{1}{2^{k-2}+1}}{\frac{3}{2^{k-2}+1} - \frac{2}{2^{k-1}+1}} = \frac{1}{3\left(2^{k-1}+1\right) - 2\left(2^{k-2}+1\right)} =$$
$$= \frac{1}{3 \cdot 2^{k-1} + 3 - 2 \cdot 2^{k-2} - 2} = \frac{1}{3 \cdot 2^{k-1} - 2^{k-1} + 1} = \frac{1}{2 \cdot 2^{k-1} + 1} =$$
$$= \frac{1}{2^k+1},$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{2^k+1}.$$

Ezt akartuk bizonyítani!

Vegyük észre megoldás 2.

A sorozat tagjait számolva kapjuk

$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{3};\ a_3 = \frac{1}{5};\ a_4 = \frac{1}{9};\ a_5 = \frac{1}{17}.$$

Azt vesszük észre, hogy a nevezőben szereplő számokra az előző nevező kétszereséből kivonva az aktuális nevezőt mindig 1-et kapunk:

$$2 \cdot 2 - 3 = 1; \qquad 2 \cdot 3 - 5 = 1; \qquad 2 \cdot 5 - 9 = 1,$$

azaz

$$2 \cdot \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = 1; \qquad n \geq 2,$$

$$2a_n - a_{n-1} = a_{n-1} \cdot a_n; \qquad n \geq 2.$$

Ezt fogjuk igazolni teljes indukcióval!

I. rész
Ellenőrízzük az elsőre a sejtésünket. Ez megtörtént, amikor az első 3 tagot kiszámoltuk.

II. rész
Tegyük fel, hogy valamely k-ig minden értékre igaz a sejtésünk.

$$2a_k - a_{k-1} = a_{k-1} \cdot a_k.$$

III. rész
Nézzük ezután $n = k + 1$-re, hogy mit kapunk. Átalakítjuk az eredeti rekurziós szabályt és alkalmazzuk a feltevésünket:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \frac{a_k a_{k-1}}{3a_{k-1} - 2a_k}, \\
a_{k+1}(3a_{k-1} - 2a_k) &= a_k a_{k-1}, \\
a_{k+1}(2a_{k-1} + \underbrace{a_{k-1} - 2a_k}_{-a_{k-1} \cdot a_k}) &= a_k a_{k-1}, \\
a_{k+1}(2a_{k-1} - a_{k-1} \cdot a_k) &= a_k a_{k-1}, \\
a_{k+1} \cdot a_{k-1}(2 - a_k) &= a_k a_{k-1} \qquad /a_{k-1} \neq 0, \\
a_{k+1}(2 - a_k) &= a_k, \\
2a_{k+1} - a_k a_{k+1} &= a_k, \\
2a_{k+1} - a_k &= a_k a_{k+1},
\end{aligned}$$

és ezt akartuk bizonyítani.

Visszatérve az igazolt

$$2 \cdot \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = 1; \qquad n \geq 2,$$

átalakított sorozatra vezessünk be új sorozatot:

$$b_n = \frac{1}{a_n};\ b_1 = 2,$$

$$2b_{n-1} - b_n = 1; \qquad n \geq 2,$$

$$b_n = 2b_{n-1} - 1; \qquad n \geq 2.$$

Ezen sorozat zárt alakját kicsi rendezés után majd index léptetéssel kapjuk:

$$b_n = 2b_{n-1} - 1,$$

$$\begin{aligned} b_n - 1 &= 2b_{n-1} - 2, \\ b_n - 1 &= 2(b_{n-1} - 1). \end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva:

$$\begin{aligned} b_n - 1 &= 2(b_{n-1} - 1), \\ b_{n-1} - 1 &= 2(b_{n-2} - 1), \\ b_{n-2} - 1 &= 2(b_{n-3} - 1), \\ &\dots \\ b_3 - 1 &= 2(b_2 - 1), \\ b_2 - 1 &= 2(b_1 - 1). \end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve:

$$\begin{aligned} b_n - 1 &= 2^{n-1}(a_1 - 1), \\ b_n - 1 &= 2^{n-1} \cdot 1, \\ b_n &= 2^{n-1} + 1, \\ \frac{1}{a_n} &= 2^{n-1} + 1, \\ a_n &= \frac{1}{2^{n-1} + 1}. \end{aligned}$$

Vegyük észre megoldás 3.

A sorozat tagjait számolva kapjuk:

$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{3};\ a_3 = \frac{1}{5};\ a_4 = \frac{1}{9};\ a_5 = \frac{1}{17}.$$

Azt vesszük észre, hogy a nevezőben szereplő számokra az előző nevező kétszereséből kivonva az aktuális nevezőt mindig 1-et kapunk:

$$2 \cdot 2 - 3 = 1; \qquad 2 \cdot 3 - 5 = 1; \qquad 2 \cdot 5 - 9 = 1,$$

azaz

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} &= 1; \qquad n \geq 2, \\ 2a_n - a_{n-1} &= a_{n-1} \cdot a_n; \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

Ezt igazoljuk teljes indukcióval!

I. rész
Ellenőrízzük az elsőre a sejtésünket. Ez megtörtént, amikor az első 3 tagot kiszámoltuk.

II. rész
Tegyük fel, hogy valamely k-ig minden értékre igaz a sejtésünk.

$$2a_k - a_{k-1} = a_{k-1} \cdot a_k.$$

III. rész
Nézzük, hogy mit kapunk akkor $n = k + 1$-re. Átalakítjuk az eredeti rekurziós szabályt és alkalmazzuk a feltevésünket:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \frac{a_k a_{k-1}}{3a_{k-1} - 2a_k},\\
a_{k+1}(3a_{k-1} - 2a_k) &= a_k a_{k-1},\\
a_{k+1}(2a_{k-1} + \underbrace{a_{k-1} - 2a_k}_{-a_{k-1}\cdot a_k}) &= a_k a_{k-1},\\
a_{k+1}(2a_{k-1} - a_{k-1}\cdot a_k) &= a_k a_{k-1},\\
a_{k+1}\cdot a_{k-1}(2 - a_k) &= a_k a_{k-1} \qquad /a_{k-1} \neq 0,\\
a_{k+1}(2 - a_k) &= a_k,\\
2a_{k+1} - a_k a_{k+1} &= a_k,\\
2a_{k+1} - a_k &= a_k a_{k+1},
\end{aligned}$$

és ezt akartuk bizonyítani.

Visszatérve az igazolt

$$2\cdot\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = 1; \qquad n \geq 2$$

összefüggésre, melyet ismét átalakítunk:

$$\begin{aligned}
2\cdot\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} &= 1,\\
2\cdot\frac{1}{a_{n-1}} - 1 &= \frac{1}{a_n},\\
\frac{2 - a_{n-1}}{a_{n-1}} &= \frac{1}{a_n},\\
\frac{a_{n-1}}{2 - a_{n-1}} &= a_n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Index léptetést végrehajtva:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{a_{n-1}}{2 - a_{n-1}},\\
a_{n-1} &= \frac{a_{n-2}}{2 - a_{n-2}},\\
a_{n-2} &= \frac{a_{n-3}}{2 - a_{n-3}},\\
&\dots\\
a_3 &= \frac{a_2}{2 - a_2},\\
a_2 &= \frac{a_1}{2 - a_1}.
\end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve:

$$a_n = \frac{a_1}{(2 - a_{n-1})\cdot(2 - a_{n-2})\cdot\ \dots\ \cdot(2 - a_2)\cdot(2 - a_1)}. \tag{2}$$

Térjünk vissza (1)-hez és kicsit másképpen alakítsunk rajta:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{a_{n-1}}{2-a_{n-1}},\\
a_n - 1 &= \frac{a_{n-1}}{2-a_{n-1}} - 1,\\
a_n - 1 &= \frac{2a_{n-1}-2}{2-a_{n-1}},\\
a_n - 1 &= 2 \cdot \frac{a_{n-1}-1}{2-a_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva:

$$\begin{aligned}
a_n - 1 &= 2 \cdot \frac{a_{n-1}-1}{2-a_{n-1}},\\
a_{n-1} - 1 &= 2 \cdot \frac{a_{n-2}-1}{2-a_{n-2}},\\
a_{n-2} - 1 &= 2 \cdot \frac{a_{n-3}-1}{2-a_{n-3}},\\
&\dots\\
a_3 - 1 &= 2 \cdot \frac{a_2-1}{2-a_2},\\
a_2 - 1 &= 2 \cdot \frac{a_1-1}{2-a_1}.
\end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve:

$$a_n - 1 = 2^{n-1} \cdot \frac{a_1 - 1}{(2-a_n)(2-a_{n-1})(2-a_2) \cdot \ \dots \ \cdot (2-a_2) \cdot (2-a_1)}.$$

Figyelembe véve (2)-t és azt, hogy $a_1 = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_1} &= \frac{1}{(2-a_n)(2-a_{n-1})(2-a_2) \cdot \ \dots \ \cdot (2-a_2) \cdot (2-a_1)},\\
a_n - 1 &= 2^{n-1} \cdot \frac{a_n}{a_1} \cdot (a_1 - 1),\\
a_n - 1 &= 2^{n-1} \cdot (-a_n),\\
a_n + 2^{n-1} \cdot a_n &= 1,\\
a_n(1 + 2^{n-1}) &= 1,\\
a_n &= \frac{1}{1+2^{n-1}},
\end{aligned}$$

és ezt akartuk bizonyítani.

13. feladat

Új sorozat bevezetése megoldás

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + 3^{n-1},\\
a_n - 3^n &= 2a_{n-1} + 3^{n-1} - 3^n,\\
a_n - 3^n &= 2a_{n-1} + 3^{n-1} - 3 \cdot 3^{n-1},\\
a_n - 3^n &= 2a_{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1},\\
a_n - 3^n &= 2\left(a_{n-1} - 3^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Új sorozatot bevezetve:

$$\begin{aligned}
b_n &= a_n - 3^n,\\
b_1 &= -1,\\
b_n &= 2b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ez egy „sima” mértani sorozat, melynek általános tagja:

$$b_n = (-1) \cdot 2^{n-1} = -2^{n-1}.$$

Ekkor

$$a_n = b_n + 3^n,$$

és így

$$a_n = 3^n - 2^{n-1}; \qquad n \in (N)^+.$$

Index léptetés megoldás

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + 3^{n-1},\\
3a_n &= 6a_{n-1} + 3^n, \qquad (1)\\
&\text{indexet léptetve}\\
a_{n+1} &= 2a_n + 3^n. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Most (2)-ből kivonva (1)-et:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - 3a_n &= 2a_n - 6a_{n-1},\\
a_{n+1} &= 5a_n - 6a_{n-1}.
\end{aligned}$$

A rekurziós összefüggést megoldva:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 2;\ r_2 = 3,$$

$$a_n = K_1 \cdot 2^{n-1} + K_2 \cdot 3^{n-1}.$$

Az első két elem felhasználásával számolva a konstansokat:

$$\begin{cases} a_1 = 2 = K_1 + K_2 \\ a_2 = 7 = 2K_1 + 3K_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k_1 = -1; \qquad K_2 = 3,$$

és így az a_n sorozat:

$$a_n = 3^n - 2^{n-1}.$$

14. feladat

Új sorozat bevezetése megoldás

Rendezve a képzési szabályt:

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)\,a_{n-1} + n^2 - 3n + 1, \\ a_n + n &= (n-1)\,a_{n-1} + (n-1)^2\,, \\ a_n + n &= (n-1)\left(a_{n-1} + (n-1)\right). \end{aligned}$$

Új sorozatot bevezetve:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n + n, \\ b_1 &= 2, \\ b_n &= (n-1)\,b_{n-1}. \end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva:

$$\begin{aligned} b_n &= (n-1)\,b_{n-1}, \\ b_{n-1} &= (n-2)\,b_{n-2}, \\ \dots \\ b_3 &= 2 \cdot b_2, \\ b_2 &= 1 \cdot b_1. \end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve:

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 \cdot n!, \\ b_n &= 2 \cdot n!. \\ a_n &= b_n - n, \end{aligned}$$

$$a_n = 2 \cdot n! - n; \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

15. feladat

Vegyük észre megoldás

A sorozat elemeit számolva:

$$a_1 = 0;\ a_2 = \frac{1}{20};\ a_3 = \frac{3}{25};\ a_4 = \frac{1}{5};\ a_5 = \frac{2}{7};\ a_6 = \frac{3}{8};\ a_7 = \frac{7}{15}.$$

A nevezőket figyelve és „jól” bővítve:

$$a_1 = \frac{0}{30};\ a_2 = \frac{2}{40};\ a_3 = \frac{6}{50};\ a_4 = \frac{12}{60};\ a_5 = \frac{20}{70};\ a_6 = \frac{30}{80};\ a_7 = \frac{42}{90}.$$

Adódik a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{(n-1)\,n}{10\,(n+2)}.$$

Ezt igazoljuk teljes indukcióval!

I. rész
Ellenőrízzük az elsőre a sejtésünket. Ez megtörtént, amikor az első 7 tagot kiszámoltuk.

II. rész
Tegyük fel, hogy valamely k-ig minden értékre igaz a sejtésünk.

$$a_k = \frac{(k-1)\,k}{10\,(k+2)}.$$

III. rész
Nézzük akkor $n = k+1$-re, hogy mit kapunk. Átalakítjuk az eredeti rekurziós szabályt és alkalmazzuk a feltevésünket:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \frac{(k+2)\,(k+1)k}{(k+5)\,(k+4)\,(k+3)}\,(a_k+1)\,7 \\
&= \frac{(k+2)\,(k+1)k}{(k+5)\,(k+4)\,(k+3)}\left(\frac{(k-1)\,k}{10\,(k+2)}+1\right)7 \\
&= \frac{(k+2)\,(k+1)k}{(k+5)\,(k+4)\,(k+3)}\cdot\frac{(k-1)\,k+10\,(k+2)}{10\,(k+2)} = \\
&= \frac{(k+2)\,(k+1)k}{(k+5)\,(k+4)\,(k+3)}\cdot\frac{k^2+9k+20}{10\,(k+2)} = \\
&= \frac{(k+2)\,(k+1)k}{(k+5)\,(k+4)\,(k+3)}\cdot\frac{(k+4)(k+5)}{10\,(k+2)} = \\
&= \frac{(k+1)k}{10\,(k+3)},
\end{aligned}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)k}{10\,(k+3)},$$

és ezt akartuk bizonyítani.

Teleszkópikus szorzat

Rendezve a sorozat képzési szabályát:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{(n+4)\,(n+3)\,(n+2)}\,(a_{n-1}+1) \\
(n+4)\,(n+3)\,(n+2)\,a_n &= (n+1)\,n\,(n-1)\,a_{n-1} + (n+1)\,n\,(n-1) \\
(n+4)\,(n+3)^2\,(n+2)^3\,(n+1)^2\,na_n &= (n+3)\,(n+2)^2\,(n+1)^3\,n^2\,(n-1)\,a_{n-1}+ \\
&\quad + (n+3)\,(n+2)^2\,(n+1)^3\,n^2\,(n-1)\,.
\end{aligned}$$

A jobb áttekinthetőség kedvéért bevezetünk egy

$$p(n) = (n-1)\cdot n\cdot(n+1)$$

függvényt. Ezt felhasználva az előzőekben leírtak:

$$a_n = \frac{p(n)}{p(n+3)}\left(a_{n-1}+1\right),$$
$$p(n+3)\cdot a_n = p(n)\cdot a_{n-1} + p(n),$$
$$p(n+3)\cdot p(n+2)\cdot p(n+1)\cdot a_n = p(n+2)\cdot p(n+1)\cdot p(n)\cdot a_{n-1} + p(n+2)\cdot p(n+1)\cdot p(n).$$

A jobb oldal második tagját kifejtve:

$$p(n+2)\cdot p(n+1)\cdot p(n) = n^9+9n^8+30n^7+42n^6+9n^5-39n^4-40n^3-12n^2.$$

Index léptetést végrehajtva:

$$\begin{aligned}
p(n+3)\cdot p(n+2)\cdot p(n+1)\cdot a_n &= p(n+2)\cdot p(n+1)\cdot p(n)\cdot a_{n-1} + p(n+2)\cdot p(n+1)\cdot p(n),\\
p(n+2)\cdot p(n+1)\cdot p(n)\cdot a_{n-1} &= p(n+1)\cdot p(n)\cdot p(n-1)\cdot a_{n-2} + p(n+1)\cdot p(n)\cdot p(n-1),\\
p(n+1)\cdot p(n)\cdot p(n-1)\cdot a_{n-2} &= p(n)\cdot p(n-1)\cdot p(n-2)\cdot a_{n-3} + p(n)\cdot p(n-1)\cdot p(n-2),\\
&\dots\\
p(6)\cdot p(5)\cdot p(4)\cdot a_3 &= p(5)\cdot p(4)\cdot p(3)\cdot a_2 + p(5)\cdot p(4)\cdot p(3),\\
p(5)\cdot p(4)\cdot p(3)\cdot a_2 &= p(4)\cdot p(3)\cdot p(2)\cdot a_1 + p(4)\cdot p(3)\cdot p(2).
\end{aligned}$$

Ugyanezt leírva $p(n)$ nélkül:

$$\begin{aligned}
&(n+4)\,(n+3)^2\,(n+2)^3\,(n+1)^2\,na_n =\\
&\qquad = (n+3)\,(n+2)^2\,(n+1)^3\,n^2\,(n-1)\,a_{n-1}+\\
&\qquad\quad + n^9+9n^8+30n^7+42n^6+9n^5-39n^4-40n^3-12n^2,\\
&(n+3)\,(n+2)^2\,(n+1)^3 n^2\,(n-1)\,a_{n-1} =\\
&\qquad = (n+2)\,(n+1)^2\,n^3\,(n-1)^2\,(n-2)\,a_{n-2}+\\
&\qquad\quad + (n-1)^9+9\,(n-1)^8+30\,(n-1)^7+42\,(n-1)^6+\\
&\qquad\quad + 9\,(n-1)^5-39\,(n-1)^4-40\,(n-1)^3-12\,(n-1)^2,\\
&\dots\\
&7\cdot 6^2\cdot 5^3\cdot 4^2\cdot 3a_3 = 6\cdot 5^2\cdot 4^3\cdot 3^2\cdot 2a_2+3^9+9\cdot 3^8+30\cdot 3^7+42\cdot 3^6+\\
&\qquad\quad + 9\cdot 3^5-39\cdot 3^4-40\cdot 3^3-12\cdot 3^2\\
&6\cdot 5^2\cdot 4^3\cdot 3^2\cdot 2a_2 = 5\cdot 4^2\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 1a_1+2^9+9\cdot 2^8+30\cdot 2^7+42\cdot 2^6+\\
&\qquad\quad + 9\cdot 2^5-39\cdot 2^4-40\cdot 2^3-12\cdot 2^2.
\end{aligned}$$

Összeadva és rendezve:

$$\begin{aligned}
&(n+4)\,(n+3)^2\,(n+2)^3\,(n+1)^2\,na_n = 8640a_1+\\
&\quad + \sum_{i=2}^{n} i^9 + 9\sum_{i=2}^{n} i^8 + 30\sum_{i=2}^{n} i^7 + 42\sum_{i=2}^{n} i^6 + 9\sum_{i=2}^{n} i^5 - 39\sum_{i=2}^{n} i^4 - 40\sum_{i=2}^{n} i^3 - 12\sum_{i=2}^{n} i^2,\\
&(n+4)\,(n+3)^2\,(n+2)^3\,(n+1)^2\,na_n = 8640a_1+\\
&\quad + \frac{(n-1)\,n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2\,(n+3)^2\,(n+4)}{10}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0, \\
(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2 n a_n &= \frac{(n-1)n^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2(n+4)}{10}, \\
(n+2)a_n &= \frac{(n-1)n}{10}, \\
a_n &= \frac{(n-1)n}{10(n+2)}; \qquad n \in \mathbb{N}^+.
\end{aligned}
$$

16. feladat

„Észrevétlen" megoldás

Rendezve a sorozat képzési szabályát:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{16}\left(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1+24a_{n-1}}\right), \\
16a_n &= 1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1+24a_{n-1}}, \\
96a_n &= 6 + 24a_{n-1} + 6\sqrt{1+24a_{n-1}}, \\
4 + 96a_n &= 1 + 24a_{n-1} + 6\sqrt{1+24a_{n-1}} + 9, \\
4(1+24a_n) &= \left(\sqrt{1+24a_{n-1}} + 3\right)^2, \\
2\sqrt{1+24a_n} &= \sqrt{1+24a_{n-1}} + 3, \\
\sqrt{1+24a_n} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+24a_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Az utolsó sor pedig az állítást bizonyítja, hiszen ha a_{n-1} és $\sqrt{1+24a_{n-1}}$ is racionális, akkor

- $a_n = \frac{1}{16}\left(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1+24a_{n-1}}\right)$ is racionális, hiszen racionális kifejezéseket alkalmaztunk racionális számokra.
- $\sqrt{1+24a_n} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+24a_{n-1}}$ is racionális, hiszen racionális kifejezéseket alkalmaztunk racionális számokra.

Ekkor a

$$
a_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4a_n + \sqrt{1+24a_n}\right)
$$

kifejezés is racionális.

„Észrevétlen" megoldás, zárt alak megadása

Rendezve a sorozat képzési szabályát:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{16}\left(1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1+24a_{n-1}}\right), \\
16a_n &= 1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1+24a_{n-1}},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
96a_n &= 6 + 24a_{n-1} + 6\sqrt{1+24a_{n-1}},\\
4 + 96a_n &= 1 + 24a_{n-1} + 6\sqrt{1+24a_{n-1}} + 9,\\
4\left(1 + 24a_n\right) &= \left(\sqrt{1+24a_{n-1}} + 3\right)^2,\\
2\sqrt{1+24a_n} &= \sqrt{1+24a_{n-1}} + 3.
\end{aligned}$$

A sorozatot alakítjuk:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{1+24a_n} &= \sqrt{1+24a_{n-1}} + 3,\\
2\sqrt{1+24a_n} - 6 &= \sqrt{1+24a_{n-1}} - 3,\\
2\left(\sqrt{1+24a_n} - 3\right) &= \sqrt{1+24a_{n-1}} - 3.
\end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva:

$$\begin{aligned}
2\left(\sqrt{1+24a_n} - 3\right) &= \sqrt{1+24a_{n-1}} - 3,\\
2\left(\sqrt{1+24a_{n-1}} - 3\right) &= \sqrt{1+24a_{n-2}} - 3,\\
&\dots\\
2\left(\sqrt{1+24a_3} - 3\right) &= \sqrt{1+24a_2} - 3,\\
2\left(\sqrt{1+24a_2} - 3\right) &= \sqrt{1+24a_1} - 3.
\end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve:

$$\begin{aligned}
2^{n-1}\left(\sqrt{1+24a_n} - 3\right) &= \sqrt{1+24a_1} - 3,\\
2^{n-1}\left(\sqrt{1+24a_n} - 3\right) &= 2,\\
\sqrt{1+24a_n} - 3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},\\
\sqrt{1+24a_n} &= 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},\\
1 + 24a_n &= \left[3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]^2,\\
a_n &= \frac{\left[3 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]^2 - 1}{24} \qquad n \in \mathbb{N}^+.
\end{aligned}$$

Ezzel látható, hogy a sorozat minden tagja racionális, hiszen végig racionális számokat eredményező kifejezéseket használtunk.

17. feladat

„Észrevétlen" megoldás

$a_1 = 2;$ $a_2 = 4;$ $a_3 = 26;$ $a_4 = 124,$
$b_1 = 0;$ $b_2 = 6;$ $b_3 = 24;$ $b_4 = 126.$
Az első egyenletből:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1},$$

$$\begin{aligned}3b_{n-1} &= a_n - 2a_{n-1},\\ 3b_n &= a_{n+1} - 2a_n.\end{aligned}$$

Ezt felhasználva a második egyenletnél:

$$\begin{aligned}b_n &= 3a_{n-1} + 2b_{n-1},\\ 3b_n &= 9a_{n-1} + 6b_{n-1},\\ a_{n+1} - 2a_n &= 9a_{n-1} + 2\left(a_n - 2a_{n-1}\right),\\ a_{n+1} &= 4a_n + 5a_{n-1},\\ a_n &= 4a_{n-1} + 5a_{n-2}.\end{aligned}$$

Ugyanezt kapnánk a b_n sorozatra is, azaz

$$b_n = 4b_{n-1} + 5b_{n-2}.$$

A rekurziós összefüggést megoldva:

$$r^2 - 4r - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -1;\ r_2 = 5,$$

$$a_n = K_1 \cdot 5^{n-1} + K_2 \cdot (-1)^{n-1}.$$

Az első két elem felhasználásával számolva a konstansokat:

$$\begin{cases} a_1 = 2 = K_1 + K_2 \\ a_2 = 4 = 5K_1 - K_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1; \qquad K_2 = 1,$$

és így az a_n sorozat:

$$a_n = 5^{n-1} + (-1)^{n-1}.$$

A b_n sorozatot hasonló módon számolva (vagy a_n sorozatból):

$$b_n = 5^{n-1} - (-1)^{n-1}.$$

„Észrevétlen" megoldás 2.

Adjuk össze az egyenleteket:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \\ b_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}a_n + b_n &= 5a_{n-1} + 5b_{n-1},\\ a_n + b_n &= 5\left(a_{n-1} + b_{n-1}\right).\end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva:

$$\begin{aligned}a_n + b_n &= 5\left(a_{n-1} + b_{n-1}\right),\\ a_{n-1} + b_{n-1} &= 5\left(a_{n-2} + b_{n-2}\right),\\ a_{n-2} + b_{n-2} &= 5\left(a_{n-3} + b_{n-3}\right),\\ &\dots\\ a_3 + b_3 &= 5\left(a_2 + b_2\right),\\ a_2 + b_2 &= 5\left(a_1 + b_1\right).\end{aligned}$$

Összeszorozva az egyenleteket (egyik sem lehet nulla) és egyből egyszerűsítve:

$$a_n + b_n = 5^{n-1}\left(a_1 + b_1\right) = 2 \cdot 5^{n-1}.$$

Ismét kezdjük az eredeti egyenletekkel, de vonjuk ki most őket:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} \\ b_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= -a_{n-1} + b_{n-1}, \\ a_n - b_n &= -\left(a_{n-1} - b_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Index léptetést végrehajtva:

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= -\left(a_{n-1} - b_{n-1}\right), \\ a_{n-1} - b_{n-1} &= -\left(a_{n-2} - b_{n-2}\right), \\ a_{n-2} - b_{n-2} &= -\left(a_{n-3} - b_{n-3}\right), \\ &\dots \\ a_3 - b_3 &= -\left(a_2 - b_2\right), \\ a_2 - b_2 &= -\left(a_1 - b_1\right). \end{aligned}$$

Összeszorozva az egyenleteket (egyik sem lehet nulla) és egyből egyszerűsítve:

$$a_n - b_n = (-1)^{n-1}\left(a_1 - b_1\right) = 2 \cdot (-1)^{n-1}.$$

Eddig kaptuk:

$$\begin{cases} a_n + b_n = 2 \cdot 5^{n-1} \\ a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}. \end{cases}$$

Összeadva az egyenleteket:

$$\begin{aligned} 2a_n &= 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1}, \\ a_n &= 5^{n-1} + (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Kivonva az egyenleteket:

$$\begin{aligned} 2b_n &= 2 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1}, \\ b_n &= 5^{n-1} - (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

18. feladat

Index léptetés megoldás

Index léptetést végrehajtva:

$$\begin{aligned} na_n &= 2(2n-1)a_{n-1}, \\ (n-1)a_{n-1} &= 2(2n-3)a_{n-2}, \\ &\dots \\ 3a_3 &= 2 \cdot 5 \cdot a_2, \\ 2a_2 &= 2 \cdot 3 \cdot a_1. \end{aligned}$$

Egyik sor sem nulla, összeszorozva és rendezve:

$$\begin{aligned}
n!a_n &= 2^{n-1} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)a_1,\\
a_n &= 2^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!},\\
a_n &= 2^n \cdot \frac{n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n! \cdot n!},\\
a_n &= 2^n \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot n}{n! \cdot n!},\\
a_n &= \frac{1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (3 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n)}{n! \cdot n!},\\
a_n &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n)}{n! \cdot n!},\\
a_n &= \frac{(2n)!}{n! \cdot n!},
\end{aligned}$$

$$a_n = \binom{2n}{n}; \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

Ez pedig egész.

Vegyük észre megoldás

A sorozat tagjait kiszámolva:

$$a_1 = 2; \qquad a_2 = 6; \qquad a_3 = 20; \qquad a_4 = 70; \qquad a_5 = 252,$$

azt vesszük észre, hogy ezek a számok a $\binom{2n}{n}$ alakúak ($n \in \mathbb{N}^+$). Ezt a sejtést teljes indukcióval bizonyítjuk!

I. rész

Ellenőrízzük az első pár tagra a sejtésünket. Ez megtörtént, amikor az első 5 tagot kiszámoltuk.

II. rész

Tegyük fel, hogy valamely k-ig minden értékre igaz a sejtésünk.

$$a_k = \binom{2k}{k}.$$

III. rész

Nézzük akkor $n = k + 1$-re, hogy mit kapunk.

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \frac{2(2k+1)}{k+1} \cdot a_k = \frac{2(2k+1)}{k+1} \cdot \binom{2k}{k} = \frac{2(2k+1)}{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} =\\
&= \frac{2(2k+1) \cdot (2k)!}{(k+1) \cdot k! \cdot k!} = \frac{2(k+1) \cdot (2k+1) \cdot (2k)!}{(k+1) \cdot k! \cdot (k+1) \cdot k!} =\\
&= \frac{(2k+2) \cdot (2k+1) \cdot (2k)!}{(k+1)! \cdot (k+1)!} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)! \cdot (k+1)!} = \binom{2k+2}{k+1}.
\end{aligned}$$

$$a_{k+1} = \binom{2k+2}{k+1} = \binom{2(k+1)}{k+1}.$$

Kombinatorikus megközelítéses megoldás

Tekintsük a következő feladatot:

Válasszunk ki $2n$ diákból n diákot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

Jelölje d_n ezt a számot, ami nyilvánvalóan egész szám. Az első érték: $d_1 = 2$.

Fogjuk meg rekurzív módon a feladatot: induljunk ki d_{n-1}-ből, ami azt a számot jelöli, hogy $2(n-1)$ diákból kiválasztunk $n-1$ diákot.

Nézzük d_n értékét, azaz $2n$ diákból kiválasztunk n diákot.
Végezzük el ezt a kiválasztást úgy, hogy a $2n$ diákot két csoportba osztjuk. Az egyik $2(n-1)$ a másik 2 diákot tartalmaz. A kiválasztás 3 eset felhasználásával lehetséges:

I. eset: A $2(n-1)$ csoportból n-et választunk, a 2-es csoportból egyet sem.
Ezt tegyük úgy, hogy $2(n-1)$-ből első menetben kiválasztunk $n-1$ diákot (ezt meg tudjuk tenni d_{n-1} féleképpen), majd a visszamaradt $2(n-1)-(n-1) = n-1$ diákból még választunk 1 diákot (amit meg tudunk tenni $n-1$ féle képpen). Minden kiválasztás többször előfordul, mégpedig n-szer. Azaz ebben az esetben

$$\frac{n-1}{n} \cdot d_{n-1}$$

módon tudunk kiválasztani.

II. eset: A $2(n-1)$ csoportból $n-1$-et választunk, a 2-es csoportból egyet.
Ezt tegyük úgy, hogy 2(n - 1)-ből kiválasztunk n - 1 diákot (ezt meg tudjuk tenni d_{n-1} féleképpen), majd a a 2-es csoportból 1 diákot, ezt megtehetjük 2 féle képpen. Összesen tehát $2 \cdot d_{n-1}$ féle képpen tudunk most választani.

III. eset: A $2(n-1)$ csoportból $n-2$-et választunk, a 2-es csoportból kettőt. Ez az eset ugyanaz, mint az I. eset, hiszen ha $2(n-1)$ csoportból $n-2$ diákot kiválasztunk, akkor marad $2(n-1)-(n-2) = n$ fő vissza, ami lényegileg azt jelenti, hogy kiválasztottuk az n főt, aki kimarad. A másik csoport esetében 2-ből nem választunk ki egyet sem, az a maradék 2 diák kiválasztását is jelenti.

Tehát d_n kiszámítására kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{n-1}{n} \cdot d_{n-1} + 2 \cdot d_{n-1} + \frac{n-1}{n} \cdot d_{n-1} = \\ &= \left(\frac{n-1}{n} + 2 + \frac{n-1}{n}\right) \cdot d_{n-1} = \\ &= \frac{4n-2}{n} \cdot d_{n-1} = 2 \cdot \frac{2n-1}{n} \cdot d_{n-1} \end{aligned}$$

$$d_n = 2 \cdot \frac{2n-1}{n} \cdot d_{n-1}.$$

Ez a rekurziós formula.

Ez pontosan az, mint a feladatban szereplő összefüggés,

- Megegyeznek az első tagok: $a_1 = 2 = d_1$
- Megegyeznek a rekurziós szabályok:

$$a_n = 2 \cdot \frac{2n-1}{n} \cdot a_{n-1},$$

$$d_n = 2 \cdot \frac{2n-1}{n} \cdot d_{n-1},$$

tehát a két sorozatnak ugyanazok a tagjai.

Ugyanakkor a d_n sorozat egész számokból áll (a kiválasztást csak egész darabszámszor lehet elvégezni), tehát akkor a feladatbeli a_n sorozat elemei is egészek.

Feladatokat megoldó programok

1. feladat számítógéppel történő megoldása

Tóth Ambrus (2022D) JavaScript megoldása

Bár Tóth Ambrus nem nevezett a versenyre, de a feladat megtetszett neki. A megoldás JavaScript nyelven íródott.

index.html

```
<!DOCTYPE html><html lang="en"><head>
    <link rel="preconnect" href="https://fonts.googleapis.com">
    <link rel="preconnect" href="https://fonts.gstatic.com" crossorigin="">
    <link href="https://fonts.googleapis.com/css2?family=Roboto" rel="stylesheet">
    <script src="p5.js"></script>
    <script src="p5.sound.min.js"></script>
    <link rel="stylesheet" type="text/css" href="style.css">
    <meta charset="utf-8">
  </head>
  <body>
    <script src="sketch.js"></script>
 </body></html>
```

style.css

```
html, body {
  margin: 0;
  padding: 0;
}
canvas {
  display: block;
}
```

sketch.js

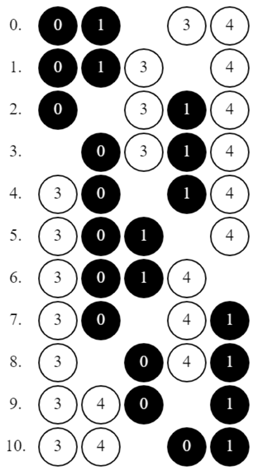
```
class Piece {
// fekete karika = 0, 1
// középen üres -
// fehér karika = 3, 4
    constructor(id, visitedPositions=null) {
        this.id = id;
        this.color = id >= 2; // 0,1 fekete; 3,4 fehér
        this.visitedPositions = Array(5);

        if (visitedPositions) { // copy prev
            for (let i = 0; i < 5; i++) {
                this.visitedPositions[i] = visitedPositions[i];
            }
        } else {
            this.visitedPositions.fill(false);
            this.visitedPositions[id] = true;
```

```
        }
    }
    copy() {
        return new Piece(this.id, this.visitedPositions);
    }
}

let slots = [
    new Piece(0),
    new Piece(1),
    undefined,
    new Piece(3),
    new Piece(4)
]

// Ez a függvény rekurzívan meghívja saját magát az összes lehetséges lépésre egészen
// addig, amíg egy lépésünk se lehet, vagy a jelenlegi állás egy nyerő állás.

let roundCount = 1;
function move(slots, emptyPlace, trace, isFirst=false) {
    let traceClone = [...trace]; // tömb klónozása, hogy leválaszthassuk több szálra
    traceClone.push(slots);
// üres a középső slot, és a többinek stimmel a színe
    if(!slots[2] && slots[0].color && slots[1].color && !slots[3].color && !slots[4].color){
// Nyertünk, kijelezzük a menetet.
        drawRoundStart(roundCount++);
        traceClone.forEach((s, index) => {
          drawState(s, index);
        });
    }

// Lehetséges lépések kipróbálása:
// Az üres pozíciót eltolhatjuk d-vel, ahol d eleme {-2, -1, 1, 2}
    [-2, -1, 1, 2].forEach(d => {
        let oldPos = emptyPlace + d;
// Vigyázni kell, nehogy illegális helyre toljuk el
        if (oldPos < 0 || oldPos > 4 || slots[oldPos].visitedPositions[emptyPlace]) return;
        if(isFirst && !slots[oldPos].color) return; // csak fehérrel kezdhetünk
// a jelenlegi állapot lemásolása
        let clone = slots.map(piece => piece ? piece.copy() : undefined);
        clone[emptyPlace] = clone[oldPos];
        clone[emptyPlace].visitedPositions[emptyPlace] = true;
        console.log(clone);
        clone[oldPos] = undefined; // átrakjuk ide az üres helyet
        move(clone, oldPos, traceClone);
    })
}

let u = 30;

// kirajzol egy adott állást
function drawState(l, lepesSzam){
  translate(0, u);
  noStroke()
  fill(0)
  text(lepesSzam+'.', 0,u/2);
  stroke(1)
  translate(u,0);
```

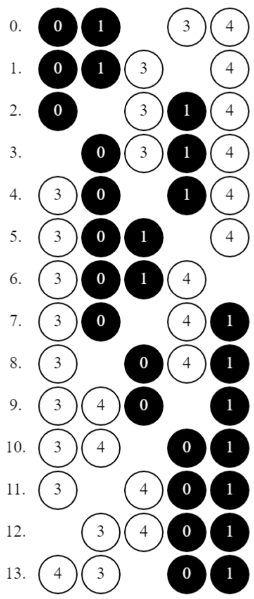
```
  for(let i in l){
    if(l[i]){
      fill(l[i].color*255);
      circle((u+0.5)*i, .5*u, u*0.9)
      fill(!l[i].color*255);
      noStroke()
      text(l[i].id, (u+0.5)*i, 0.5*u);
      stroke(1)
    }
  }
  translate(-u, 0)
}

// zöld téglalap kirajzolása a menet elején
function drawRoundStart(menet){
  translate(0, 1.5*u);
  fill(0)
  push()
  noStroke()
  textSize(24)
  text(menet+". menet", 3*u, u*0.7)
  pop()
  translate(0, 0.5*u)
}

function setup() {
  textFont("Roboto")
  createCanvas(300, 7000);
  textAlign(CENTER,CENTER);
  noLoop();
}

function draw() {
  translate(0.5*u, 0);
  move(slots, 2, [], true);
}
```

A program 16 megoldást talált, amelyek itt megnézhetők. Az egyes megoldások lépéseit a korongok adott helyre történt rajzolásával mutatja meg.

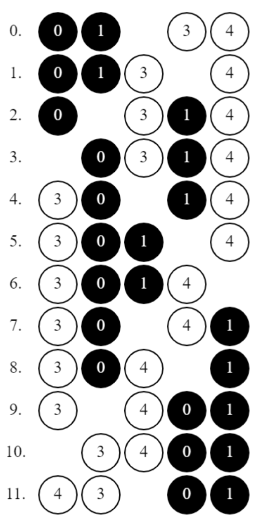
1. megoldás



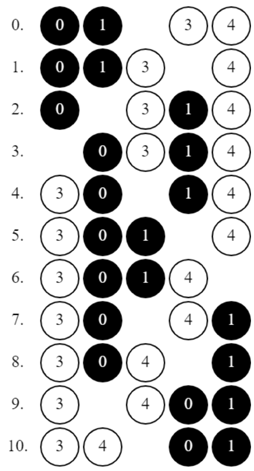
2. megoldás



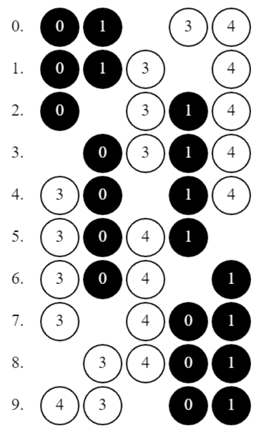
3. megoldás



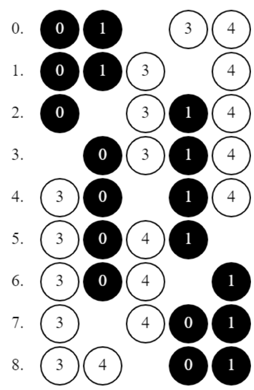
4. megoldás



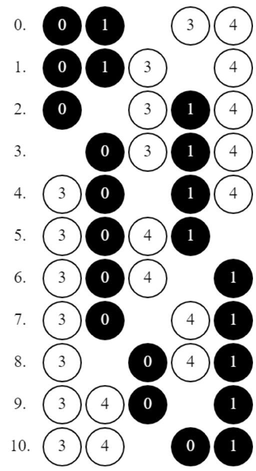
5. megoldás



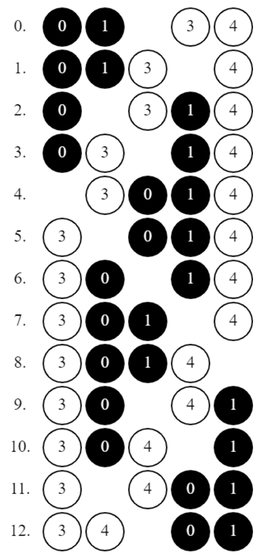
6. megoldás



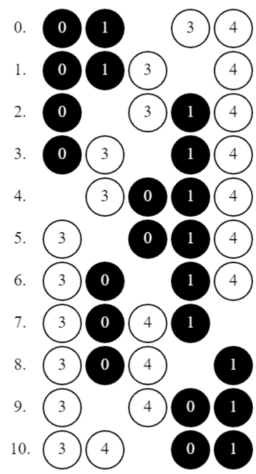
7. megoldás



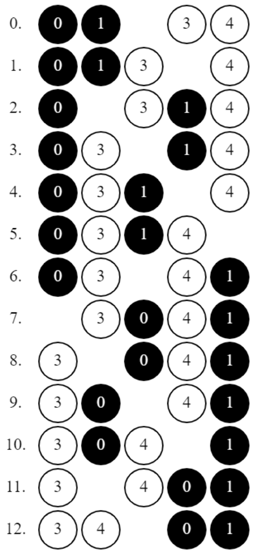
8. megoldás



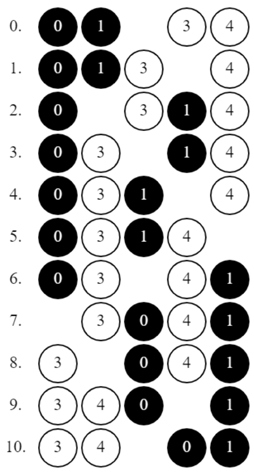
9. megoldás



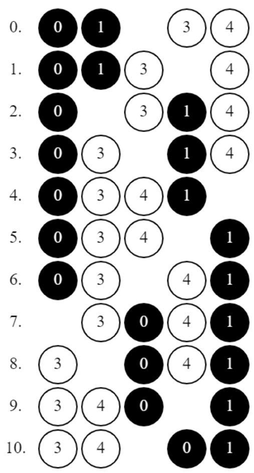
10. megoldás



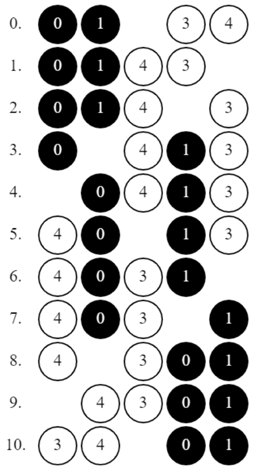
11. megoldás



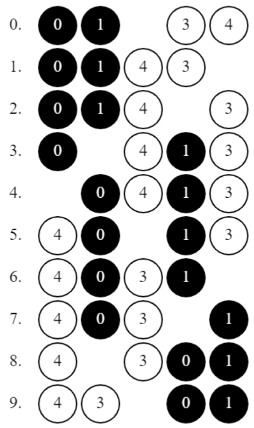
12. megoldás



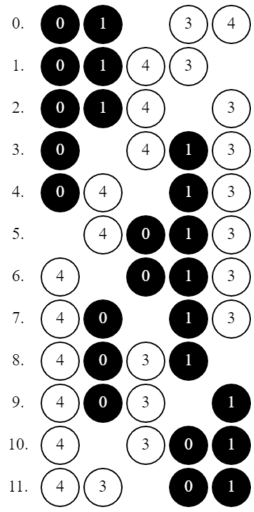
13. megoldás



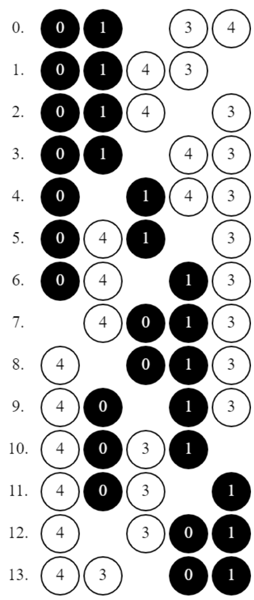
14. megoldás



15. megoldás



16. megoldás



4. feladat számítógéppel történő megoldása

Free Pascal megoldás

Eredeti Newton algoritmus

```
Var A, regi, uj : Real;
    i : Integer;
Begin
  Write('Kerem a szamot: ');
  Readln(A);
  Writeln('A szam gyoke: ',sqrt(A):16:16);
  regi:=1;
  For i:=1 to 10 do
    Begin
      uj:=(regi+A/regi)/2;
      Writeln(i:2,'. ',uj:20:16);
      regi:=uj;
    End;
  Readln;
End.
```

A megadott szám a 20, aminek a gyöke: $4,472135954999579392$. A futás eredménye itt látható, ahol a 7. lépés után már a végeredményt láthatjuk.

```
A szam gyoke: 4.4721359549995794
 1.  10.5000000000000000
 2.   6.2023809523809526
 3.   4.7134745452883653
 4.   4.4783144454743820
 5.   4.4721402170656992
 6.   4.4721359550016100
 7.   4.4721359549995796
 8.   4.4721359549995796
 9.   4.4721359549995796
10.   4.4721359549995796
```

Módosított Newton algoritmus

```
Var A, regi, uj : Real;
    i : Integer;
Begin
  Write('Kerem a szamot: ');
  Readln(A);
  Writeln('A szam gyoke: ',sqrt(A):16:16);
  regi:=1;
  For i:=1 to 54 do
    Begin
      uj:=(3*regi+A/regi)/4;
      Writeln(i:2,'. ',uj:20:16);
      regi:=uj;
    End;
  Readln;
End.
```

A megadott szám a 20, aminek a gyöke: $4,472135954999579392$. A futás eredménye itt látható, ami a 52. lépés után már a végeredményt mutatja. Jól láthatóan lassabb az algoritmus.

```
A szam gyoke: 4.4721359549995794
 1.   5.7500000000000000
 2.   5.1820652173913047
 3.   4.8514151951619890
 4.   4.6691885018367563
 5.   4.5727412677522912
 6.   4.5229919681241864
 7.   4.4977069163852139
 8.   4.4849577805498066
 9.   4.4785560316965451
10.   4.4753482941669258
11.   4.4737427010257020
12.   4.4729394722784690
13.   4.4725377497249150
14.   4.4723368613861512
15.   4.4722364104491454
16.   4.4721861832884704
17.   4.4721610692850566
18.   4.4721485121775766
19.   4.4721422335973928
20.   4.4721390943006902
21.   4.4721375246506856
22.   4.4721367398252703
23.   4.4721363474124596
24.   4.4721361512060280
25.   4.4721360531028056
26.   4.4721360040511930
27.   4.4721359795253868
28.   4.4721359672624832
29.   4.4721359611310314
30.   4.4721359580653051
31.   4.4721359565324423
32.   4.4721359557660110
33.   4.4721359553827948
34.   4.4721359551911872
35.   4.4721359550953830
36.   4.4721359550474808
37.   4.4721359550235302
38.   4.4721359550115549
39.   4.4721359550055668
40.   4.4721359550025728
41.   4.4721359550010762
42.   4.4721359550003275
43.   4.4721359549999535
44.   4.4721359549997661
45.   4.4721359549996729
46.   4.4721359549996258
47.   4.4721359549996027
48.   4.4721359549995912
49.   4.4721359549995849
50.   4.4721359549995823
51.   4.4721359549995805
52.   4.4721359549995796
53.   4.4721359549995796
54.   4.4721359549995796
```

5. feladat számítógéppel történő megoldása

Free Pascal megoldás

A megadott algoritmus

```
Uses math;
Var A, regi, uj : Real;
    i : Integer;
Begin
  Write('Kerem a szamot: ');
  Readln(A);
  Writeln('A szam kobgyoke: ',A**(1/3):16:16);
  regi:=1;
  For i:=1 to 10 do
    Begin
      uj:=(regi+A/regi/regi)/2;
      Writeln(i:2,'. ',uj:20:16);
      regi:=uj;
    End;
  Readln;
End.
```

A megadott szám a 20, aminek a köbgyöke: 2.71441761659490657. A futás eredménye itt látható, ami a 52. lépés után már a végeredményt mutatja.

```
A szam kobgyoke: 2.7144176165949066
 1.  10.5000000000000000
 2.   5.3407029478458048
 3.   3.0209444039787172
 4.   2.6062299101536452
 5.   2.7753411839516344
 6.   2.6859472214682847
 7.   2.7291070825730515
 8.   2.7071912702742265
 9.   2.7180597495921464
10.   2.7126038673790220
11.   2.7153263107199521
12.   2.7139637256283411
13.   2.7146446759495499
14.   2.7143041154044694
15.   2.7144743743094635
16.   2.7143892395177605
17.   2.7144318055784753
18.   2.7144105222143757
19.   2.7144211638129847
20.   2.7144158429928207
21.   2.7144185033976878
22.   2.7144171731939504
23.   2.7144178382954931
24.   2.7144175057446405
25.   2.7144176720200464
26.   2.7144175888823385
27.   2.7144176304511909
28.   2.7144176096667647
29.   2.7144176200589776
30.   2.7144176148628709
31.   2.7144176174609242
32.   2.7144176161618976
33.   2.7144176168114109
34.   2.7144176164866542
35.   2.7144176166490328
36.   2.7144176165678435
37.   2.7144176166084382
38.   2.7144176165881406
39.   2.7144176165982894
40.   2.7144176165932152
41.   2.7144176165957523
42.   2.7144176165944836
43.   2.7144176165951182
44.   2.7144176165948006
45.   2.7144176165949596
46.   2.7144176165948801
47.   2.7144176165949196
48.   2.7144176165949001
49.   2.7144176165949099
50.   2.7144176165949050
51.   2.7144176165949072
52.   2.7144176165949063
53.   2.7144176165949068
54.   2.7144176165949063
55.   2.7144176165949068
```

6. feladat számítógéppel történő megoldása

Free Pascal megoldás

A szita algoritmus

```
Const db = 500;
Var Prim : Array [1..db] of Boolean;
    i,j : Integer;
Begin
  For i:=1 to db do Prim[i]:=True;
  For i:=2 to Trunc(sqrt(db)+1) do
    Begin
      j:=2*i;
      While (j<=db) do
        Begin
          Prim[j]:=False;
          Inc(j,i);
        End;
   End;
  For i:=1 to db do
    Begin
      if Prim[i] then Write(i:4)
                 else Write('   .');
      if i mod 20 = 0 then Writeln;
    End;
End.
```

```
   1   2   3   .   5   .   7   .   .   .  11   .  13   .   .   .  17   .  19   .
   .   .  23   .   .   .   .   .  29   .  31   .   .   .   .   .  37   .   .   .
  41   .  43   .   .   .  47   .   .   .   .   .  53   .   .   .   .   .  59   .
  61   .   .   .   .   .  67   .   .   .  71   .  73   .   .   .   .   .  79   .
   .   .  83   .   .   .   .   .  89   .   .   .   .   .   .   .  97   .   .   .
 101   . 103   .   .   . 107   . 109   .   .   . 113   .   .   .   .   .   .   .
   .   .   .   .   .   . 127   .   .   . 131   .   .   .   .   . 137   . 139   .
   .   .   .   .   .   .   .   . 149   . 151   .   .   .   .   . 157   .   .   .
   .   . 163   .   .   . 167   .   .   .   .   . 173   .   .   .   .   . 179   .
 181   .   .   .   .   .   .   .   .   . 191   . 193   .   .   . 197   . 199   .
   .   .   .   .   .   .   .   .   .   . 211   .   .   .   .   .   .   .   .   .
   .   . 223   .   .   . 227   . 229   .   .   . 233   .   .   .   .   . 239   .
 241   .   .   .   .   .   .   .   .   . 251   .   .   .   .   . 257   .   .   .
   .   . 263   .   .   .   .   . 269   . 271   .   .   .   .   . 277   .   .   .
 281   . 283   .   .   .   .   .   .   .   .   . 293   .   .   .   .   .   .   .
   .   .   .   .   .   . 307   .   .   . 311   . 313   .   .   . 317   .   .   .
   .   .   .   .   .   .   .   .   .   . 331   .   .   .   .   . 337   .   .   .
   .   .   .   .   .   . 347   . 349   .   .   . 353   .   .   .   .   . 359   .
   .   .   .   .   .   . 367   .   .   .   .   . 373   .   .   .   .   . 379   .
   .   . 383   .   .   .   .   . 389   .   .   .   .   .   .   . 397   .   .   .
 401   .   .   .   .   .   .   . 409   .   .   .   .   .   .   .   .   . 419   .
 421   .   .   .   .   .   .   .   .   . 431   . 433   .   .   .   .   . 439   .
   .   . 443   .   .   .   .   . 449   .   .   .   .   .   .   . 457   .   .   .
 461   . 463   .   .   . 467   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   . 479   .
   .   .   .   .   .   . 487   .   .   . 491   .   .   .   .   .   .   . 499   .
```

Használt összefüggések

$$S_1=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}=\frac{2n^2+3n2+n}{6}$$

$$S_3=\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{2}=\frac{n4+2n^3+n^2}{4}$$

$$S_4=\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

$$S_5=\sum_{i=1}^{n} i^5=\frac{n^2\left(n+1\right)^2\left(2n^2+2n-1\right)}{12}=\frac{2n^6+6n^5+5n^3-n^2}{12}$$

$$S_6=\sum_{i=1}^{n} i^6=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\left(3n^4+6n^3-3n+1\right)}{42}=\frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$$

$$S_7=\sum_{i=1}^{n} i^7=\frac{n^2\left(n+1\right)^2\left(3n^4+6n^3-n^2-4n+2\right)}{24}=\frac{3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2}{24}$$

$$S_8=\sum_{i=1}^{n} i^8=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\left(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3\right)}{90}=$$

$$=\frac{10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n}{90}$$

$$S_9=\sum_{i=1}^{n} i^9=\frac{n^2\left(n+1\right)^2\left(n^2+n-1\right)\left(2n^4+4n^3-n^2-3n+3\right)}{20}=$$

$$=\frac{2n^{10}+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2}{20}$$

Kardos Montágh

Matematikaverseny