Bolyai verseny javítási útmutató

1. Legkevesebb hány számjegyet kell törölni az alábbi 2012 jegyű számból, hogy a megmaradt szám jegyeinek összege 2012 legyen?

2012201220122012….2012 **7 pont**

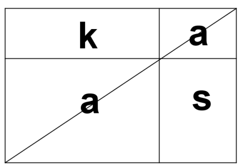
Megoldás:

2012 számjegyeinek összege 5. (1p)
A kérdéses számban 2012/4 = 503 –szor írtuk le a 2012-t. (1p)
Az összes számjegy összege $503 \cdot 5 = 2515$ (1p)
(A fenti 3 pont természetesen akkor is jár, ha másképp jut el a számjegyek összegéhez.)
A letörlendő számjegyek összege $2515 - 2012 = 503$ (1p)
Akkor lesz a legkevesebb a letörölt számjegyek darabszáma, ha a lehető legtöbb 2-t töröljük le. (1p)
$503 = 251 \cdot 2 + 1$ (1p)
251 db 2-t és 1 db 1-t, összesen 252 db számjegyet kell letörölni. (1p)

2. Olasz Jolán pizzát sütött a családnak vacsorára. A téglalap alakú pizzát a következő módon ízesítette: Egy késsel megjelölte a téglalap átlóját, majd az átló egy pontján át a tészta szélével párhuzamos vágásokkal négy téglalap alakú részre vágta a pizzát. Amelyik kettőn keresztül ment az átló, ananászos lett, a harmadik kolbászos, a negyedik sonkás. Mi készült több, kolbászos vagy sonkás pizza? Miért?

7 pont

Megoldás:



Ha az adott feltételekkel lerajzoljuk a pizzát, ezt az ábrát kapjuk:
A helyes ábra (2p)
A téglalap területét az átló két egyenlő részre osztja. (1p)
A két nagy háromszög területe egyenlő (1p)
Ugyanígy két – két kis háromszög területe is egyenlő (1p)
Ha egyenlő területekből egyenlő területeket elveszünk, egyenlők maradnak. (1p)
Tehát ugyanannyi sonkás pizza készült, mint kolbászos. (1p)

3. Az asztalon lévő nyolc dobókocka felső lapján 2, 3, 4 illetve 6 pötty van. A legtöbb a 4 pöttyös lap és a legkevesebb a 6 pöttyös. Mennyi a nyolc kocka alsó lapjain levő pöttyök összege? (A dobókocka átellenes lapjain levő pöttyök összege 7.) **7 pont**

Megoldás:

A feladat feltételeinek csak az felel meg, ha egy felső lapon van 6 pötty,
három felső lapon 4-4 pötty, kettőn 2 pötty és ugyancsak kettőn 3 pötty. 3 pont

A felső lapokon összesen tehát: $(6 + 3\cdot4 + 2\cdot2 + 2\cdot3 =)$ 28 pötty van. 2 pont
Mivel egy-egy kocka átellenes lapjain levő pöttyök összege 7,
ezért a nyolc kockán alul és felül összesen $(7\cdot8 =)$ 56 pötty van, 1 pont
alul tehát $(56 - 28 =)$ 28 a pöttyök számának összege. 1 pont

4. Hányféleképpen választhatunk két különböző, 20-nál kisebb pozitív egész számot úgy, hogy a szorzatuk osztható legyen 10-zel?

Megoldás vázlat (1):

Egy szám akkor osztható 10-zel, ha osztható 2-vel és 5-tel. *1 pont*

Három eset lehetséges:

Az egyik osztható 10-zel (ez csak a 10), ekkor a másik tényező bármi lehet. Ez 18 párt jelent. *2 pont*

Az egyik szám az 5 és a másik páros szám. Mivel 20-nál kisebb páros szám 9 db van, ezért ez 9 párt jelentene, de a 10 már nem lehet, ezért ez 8 pár. 2 *pont*

Az egyik szám a 15 és a másik egy páros szám, ami már nem lehet a 10. Ez szintén 8 párt jelent. 2 *pont*

Tehát összesen 18+8+8=34 féleképpen választhatjuk ki a két különböző számot. 2 *pont*

Összesen: *9 pont*

Megoldás vázlat (2):

Egy szám akkor osztható 10-zel, ha osztható 2-vel és 5-tel. *1 pont*

Három eset lehetséges:

Az egyik osztható 10-zel (ez csak a 10), ekkor a másik tényező bármi lehet. Ez 18 párt jelent. *2 pont*

Az egyik szám az 5 és a másik páros szám. Mivel 20-nál kisebb páros szám 9 db van,ezért ez 9 párt jelent. 2 *pont*

Az egyik szám a 15 és a másik egy páros szám. Ez szintén 9 párt jelent. 1 *pont*

Ez összesen 18+9+9=36 eset. 1 *pont*

De a 10;5 és 10;15 párt duplán számoltuk, ezért 36-2=34 féleképpen választhatjuk ki a két különböző számot. 2 *pont*

Összesen: *9 pont*

Megoldás vázlat (3):

Egy szám akkor osztható 10-zel, ha osztható 2-vel és 5-tel. *1 pont*

Ha az egyik 2-vel osztható, de 10-zel nem (ez 8 féle szám) és a másik 5-tel (ez 3 féle szám), így összesen $8 \cdot 3 = 24$ eset lehet. *4 pont*

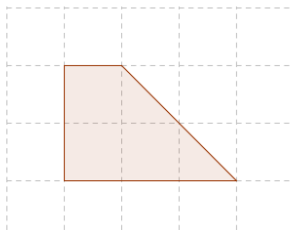
Ha az egyik osztható 10-zel, akkor a másik tetszőleges lehet, de ha páros azt már számoltuk, így 10 féle lehet. *2 pont*

Tehát összesen 24+10=34 féleképpen választhatjuk ki a két különböző számot. *2 pont*

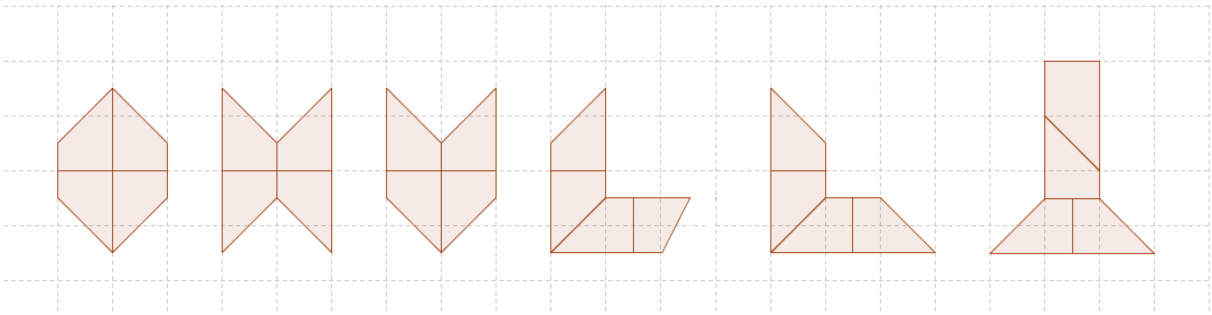
Összesen: ***9 pont***

5. Rajzold meg azokat a tengelyesen szimmetrikus hatszögeket, amelyek négy darab ilyen trapézból állnak!

10 pont



Megoldás:

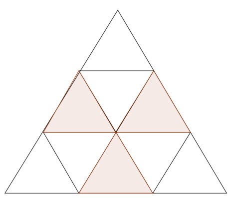


Minden helyes ábra 2 pont, de maximum 10 pont adható.

6. Az ábra kis háromszögeibe beírtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 számjegyeket úgy, hogy minden 2 egység oldalú (4 kis háromszögből álló) háromszögben azonos a beírt számok összege. Jelölje ezt az összeget S. Lehet-e S értéke a) 20; b) 24? **10 pont**

Megoldás:

Ha összeadjuk az összes (3 db) kis háromszögben lévő számokat, akkor a jelölt mezőkön lévő számokat kétszer számoljuk. (1p)



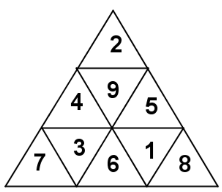
A beírandó számok összege: $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ (1p)

a) Ha $s = 20$, akkor a 3 lehetséges kis háromszögben az összeg $3 \cdot 20 = 60$ (1p)

Így $60 - 45 = 15$ –öt számoltunk duplán, tehát ennyi a jelölt háromszögekben lévő számok összege. (1p)

Pl. $4 + 5 + 6 = 15$ (1p)

Így egy lehetséges beírás (1p)



(Próbálgatással, indoklás nélkül helyesen kitöltött háromszögért 4p jár.)

b) Ha $s = 24$, akkor a 3 lehetséges kis háromszögben az összeg $3 \cdot 24 = 72$ (1p)

Így $72 - 45 = 27$ –öt számoltunk duplán, tehát ennyi kellene legyen a jelölt háromszögekben lévő számok összege. (1p)

A három legnagyobb szám összege: $9 + 8 + 7 = 24$, (1p)

tehát ebben az esetben lehetetlen a háromszöget kitölteni. (1p)