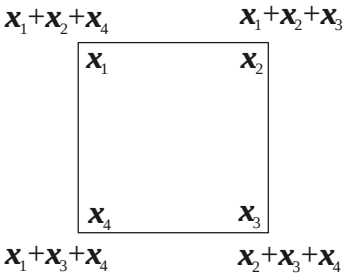
17. alkalom

A szakkörön mégsem a Kömal példák kerültek terítékre, hanem tovább folytattuk a Kódok feladatgyűjtemény feldolgozását. Egy bemelegítő feladat után tisztáztuk az ISBN szám felépítését (**4.2**), majd 1-hiba javító kódot gyártottunk (**4.6**) és totóztunk is (**5.6, 5.7**). Menet közben megismerkedtünk a Hamming távolság fogalmával, és néhány egyszerű lemmát fogalmaztunk meg a kódok minimális távolsága és hibajelző, illetve javító képessége között (pld **4.5**).

Házi feladat lesz: **5.9**, és egy szokatlan példa a 7-szög bináris mintáiról.

A 17. szakkör részletezett anyaga

Négyzetminta Egy négyzet csúcsaiba egy-egy egész számot írtunk, majd mindegyik csúcs mellé még odaírtuk az abba a csúcsba írt számnak a szomszédos csúcsokba írt számokkal vett összegét. Hány páratlan szám lehet az így kapott nyolc szám között? Adjuk meg az összes lehetőséget!



Megoldás
A feladat nem nehéz, 0, 4 vagy 8 páratlan számot kaphatunk.
Ez az egyszerű példa a későbbiekben egészen más összefüggésben elő fog bukkanni, az lesz az igazi feladat, hogy észrevegyük, mikor.

3.2 Nézzük meg sok különböző könyv azonosítóját, az úgynevezett ISBN (International Standard Book Number) számot! Próbáljuk meg kideríteni, milyen részekből áll, hogyan épül fel ez az azonosító! (Segítség: a legutolsó jegy egy ellenőrző jegy, segítségével kiszűrhető bármelyik két számjegy felcserélése, illetve bármelyik jegy elírása. A többi jegy három csoportba osztható és a könyv azonosítására szolgál.)

Megoldás
Nagy segítséget jelent, ha észrevesszük, hogy néhány ISBN számban az utolsó jegy nem is szám, hanem az X jel. Innen sejthető, hogy az ellenőrző jegy a múlt órai **4.1** feladat megoldásához hasonlóan adható meg, csak annyi a különbség, hogy mod 11 kell számolni.

A Bergengóc példatár első kiadásának kódja pld ISBN 963 9132 31 4. Ebből az első három jegy, 963, Magyarország kódja. Nagyobb országoknak kevesebb jegyből áll a kódja, hogy több maradjon a könyv azonosítására. A következő négy jegy, 9132, a Typotex kiadót jelöli. Ez egy viszonylag kis kiadó, ezért ilyen hosszú a kódja. A következő két szám, a 32, a könyv sorszáma. Ha a Typotex túllépi a kódjához tartozó 100 könyv kiadására lehetőséget adó keretet, akkor majd új kódot kap. Az utolsó jegy, a 4-es az ellenőrző jegy, ez a korábbiakból így számítható ki:

$$4 \equiv 1\cdot 9 + 2\cdot 6 + 3\cdot 3 + 4\cdot 9 + 5\cdot 1 + 6\cdot 3 + 7\cdot 2 + 8\cdot 3 + 9\cdot 1 \pmod{11}.$$

Ha a szorzatösszeg 11-es maradéka 10 lenne, akkor az X betű lenne az ellenőrző jegy.

Általánosabban: az ISBN kód első kilenc jele egy-egy számjegy, ezek az országot, azon belül a kiadót, illetve a könyvet azonosítják; ezen belül nincs rögzítve, hogy e három jellemző melyike hány helyen tárolódik; nagyobb országok, nagyobb kiadók rövidebb, kisebb országok, kisebb kiadók hosszabb karaktersort kapnak; összesen mindig 9 jegyből áll ez a három rész. A tizedik jegy meghatározására az alábbi egymással ekvivalens feltételek bármelyike alkalmazható.

$$x_{10} \equiv 2\cdot x_9 + 3\cdot x_8 + 4\cdot x_7 + 5\cdot x_6 + 6\cdot x_5 + 7\cdot x_4 + 8\cdot x_3 + 9\cdot x_2 + 10\cdot x_1 \pmod{11};$$
$$x_{10} \equiv 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 5\cdot x_5 + 6\cdot x_6 + 7\cdot x_7 + 8\cdot x_8 + 9\cdot x_9 \pmod{11};$$
$$0 \equiv 1\cdot x_{10} + 2\cdot x_9 + 3\cdot x_8 + 4\cdot x_7 + 5\cdot x_6 + 6\cdot x_5 + 7\cdot x_4 + 8\cdot x_3 + 9\cdot x_2 + 10\cdot x_1 \pmod{11};$$
$$0 \equiv 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 5\cdot x_5 + 6\cdot x_6 + 7\cdot x_7 + 8\cdot x_8 + 9\cdot x_9 + 10\cdot x_{10} \pmod{11}.$$

Az utolsó alakból könnyen leolvasható, hogy az ellenőrző jegy kiszűri bármely két jegy cseréjét vagy bármelyik jegy elírását. Ha pld az ötödik jegyet x_5-ről x_5'-re módosítjuk, akkor nem állhat fenn a

$$0 \equiv 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 5\cdot x_5 + 6\cdot x_6 + 7\cdot x_7 + 8\cdot x_8 + 9\cdot x_9 + 10\cdot x_{10} \pmod{11},$$
$$0 \equiv 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 5\cdot x_5' + 6\cdot x_6 + 7\cdot x_7 + 8\cdot x_8 + 9\cdot x_9 + 10\cdot x_{10} \pmod{11}$$

közül mindkettő, mert különbségük:

$$0 \equiv 5\cdot(x_5 - x_5') \pmod{11},$$

és mivel 11 prím, így ez csak akkor állhat fenn, ha

$$0 \equiv x_5 - x_5' \pmod{11},$$

azaz $x_5 = x_5'$, tehát ha nem is történt módosítás. Ehhez hasonlóan, ha feltételezzük, hogy az i-edik és j-edik jegy cseréje érvényes számot eredményez, akkor a

$$0 \equiv (i - j)\cdot(x_i - x_j) \pmod{11}$$

kongruenciához jutunk, amelyben $|i - j| < 10$ és $|x_i - x_j| < 10$, tehát $i = j$ vagy $x_i = x_j$, azaz nem történt valódi csere.

Néhány további azonosító leírását is összegyűjtöttük.

Most következzék egyszerre két feladat:

4.6 Keress háromféle betű alkalmazásával minél több szóból álló négybetűs 1-hiba javító kódot (lásd az előző szakkör anyagát)!

5.6 Bergengóciában a totó, a bajnokságnak megfelelően csak 4 mérkőzést tartalmaz. Minden mérkőzés eredményére háromféleképpen lehet tippelni: 1-gyel, 2-vel vagy ***X***-szel. Egy szelvényen csak egy tipposzlop van.
a) Hány szelvényt kell venni ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatunk?
b) És ahhoz, hogy biztosan legyen olyan szelvényünk, amely legalább 3 találatos?

Definíció (***Hamming távolság***)
Ha adott két szó (azaz két azonos hosszúságú jelsorozat), akkor sorban összehasonlíthatjuk a bennük lévő jeleket: először a két szó első jeleit vetjük össze, azután a szavakban másodiknak következő jeleket, ..., végül az utolsókat. Azoknak a helyeknek a számát, ahol egymástól különböző jeleket találunk, a két szó Hamming távolságának nevezzük. Formálisan:

$$d_H(x_1x_2x_3...x_n, y_1y_2y_3..y_n) = |\{i|\ x_i \neq y_i\}|,$$

Pld $d_H(AABC, ABBA) = 2$, mert a második helyen (***A*** ill. ***B***) és a negyediken (***C*** és ***A***) van eltérés.

Történeti megjegyzés
Claude E. Shannon (lásd pld Györfi László cikkét, Charles A. Gimon írását vagy a MacTutor Matematikatörténeti Arhívumot) a Bell Laboratórium munkatársaként 1948-ban publikálta a modern kommunikáció elvi megalapozását jelentő "A Mathematical Theory of Communication" című cikkét. 1950-ben a cég műszaki folyóiratának másik számában R. W. Hamming (lásd a MacTutor Matematikatörténeti Arhívumot) "Error Detecting and Error Correcting Codes" című írásában konkrét kódolási módszereket javasolt.

Definíció (***Kód minimális távolsága***)
Egy adott kód minimális távolságán a különböző kódszavai között fellépő legkisebb Hamming távolságot értjük.

Lemma
Egy kód pontosan akkor 1-hiba javító, ha minimális távolsága legalább 3.

Bizonyítás
Ha a kód nem 1-hiba javító, akkor van olyan ***p*** kódszó (pld ***AABA***), amit egy betűjében megváltoztatva egy c_1 kódszóhoz jutunk (pld ***AABC***), de meg lehet ***p***-t úgy is változtatni egy betűvel, hogy egy ***c***2 kódszót kapjunk (pld ***ABBA***). Ebben az esetben a ***c***1, ***c***2 kódszavak Hamming távolsága egy vagy kettő attól függően, hogy a két esetben a változtatás ugyanazon a helyen történt vagy nem. Tehát 1-hiba javításra alkalmatlan kódok minimális távolsága kisebb 3-nál.
Másrészt, ha egy kód minimális távolsága kisebb, mint 3, akkor van a kódban két olyan kódszó, c_1, c_2 (pld ***AABC*** és ***ABBA***), amelyek Hamming távolsága 2 vagy 1. Ha a távolság 2, akkor könnyen készíthetünk olyan ***p*** szót, amely mindkét kódszótól csak egy helyen tér el: ***p*** egyezzen meg c_1-gyel és c_2-vel mindazokon a helyeken, ahol c_1 és c_2 megegyezik egymással (***p*** = ***A_B_***), az eltérést okozó két hely egyikén pedig ***p*** egyezzen meg c_1-gyel (***p*** = ***AAB_***, vagy ***A_BC***), a másikon c_2-vel (***p*** = ***AABA***, vagy ***p*** = ***ABBC***). Ha véletlenül a ***p*** üzenet érkezik hozzánk, akkor nem tudjuk kijavítani. Ha c_1 és c_2 Hamming távolsága csak 1, akkor c_1-et kapva bizonytalanságban vagyunk, hogy c_1-et vagy c_2-t küldték, ha egy hibát megengedünk.

1. Házi feladat
4.11 Bizonyítsd be, hogy egy kód pontosan akkor
a) ***k***-hiba javító, ha minimális távolsága legalább 2***k***+1;
b) ***k***-hiba jelző, ha minimális távolsága legalább ***k***+1;
c) ***k***-törlés javító, ha ***k***-hiba jelző!

Most visszatérünk a **4.6** feladat megoldásához.

4.6 I. megoldása (***A minimális távolság alapján***)

Tegyük fel, hogy már van egy ilyen kódunk! Legyenek a betűk 0, 1, 2, és gyűjtsük össze a 0-val kezdődő kódszavakat! Legfeljebb három lehet belőlük, mert ha már négy volna, akkor volna közöttük kettő, amelyek a második "betűben" is megegyeznek, és így legfeljebb csak két helyen térnek el egymástól. Teljesen hasonlóan az 1-gyel és a 2-vel kezdődő szavakból is legfeljebb három-három lehet, tehát összesen legfeljebb csak 9 ilyen kódszó van.

Találtam is 9 megfelelő kódszót:

0	0	0	0		1	0	1	2		2	0	2	1
0	1	1	1		1	2	0	1		2	1	0	2
0	2	2	2		1	1	2	0		2	2	1	0

Először a 0-val kezdődőket írtam össze (első oszlop). Egyszerűnek tűnt a maradék három jegyet mindig egyformának választani. Ezután már alig volt szabadságom. Kellett még három-három 1-gyel és 2-vel kezdődő kódszó. Ezeknek az utolsó három helyén 0-ból, 1-ből és 2-ből is csak egy-egy fordulhatott elő szavanként, hogy a már kijelölt három kódszó egyikével se egyezzenek meg két helyen. Három jelnek épp hat permutációja van, ez adja az esélyt. Miután leírtam az 1021 kódszót is már csak egyféleképpen lehetett folytatni: 021 ciklikus elforgatottjait kellett leírni az 1-es mögé, hogy ne legyen újabb egyezés, a másik három permutációt pedig a 2-es mögé.

4.6 II. megoldása (***Algebrai konstrukció az*** 1.1 ***feladat analógiájára***)

Ha a kódszavakat 1-1 helyen az összes lehetséges módon megváltoztatjuk, akkor csupa különböző szóhoz kell jutnunk. Egy kódszónak négy betűje van, mindegyiket kétféleképpen változtathatjuk meg, így egy kódszóhoz önmagával együtt 9 szó tartozik. Mivel összesen $3^4 = 81$ szó van, így legfeljebb 81/9 = 9 kódszó lehetséges.

Megadunk 9 megfelelő kódszót. Legyen a négy betű sorban $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ és $\boldsymbol{x}_4$.
Válasszuk meg $\boldsymbol{x}_1$-et és $\boldsymbol{x}_2$-t az összes lehetséges módon! Ez összesen épp 9 lehetőség.
$\boldsymbol{x}_3$-at és $\boldsymbol{x}_4$ számítsuk ki $\boldsymbol{x}_1$-ből és $\boldsymbol{x}_2$-ből az 1.1 feladat megoldása alapján, csak modulo 3 számolva:

$$\boldsymbol{x}_3 \equiv \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \pmod 3, \qquad \boldsymbol{x}_4 \equiv \boldsymbol{x}_1 + 2\cdot\boldsymbol{x}_2 \pmod 3.$$

Tehát a kódszavak: 0000, 0112, 0221, 1011, 1120, 1202, 2022, 2101, 2210.

Ha kapunk egy négybetűs szót, akkor "betűit" helyettesítsük be a fenti egyenletekbe. Ha mindkettő teljesül, akkor nincs hiba (vagy egy hibánál több van). Ha csak az egyik nem teljesül, akkor annak bal oldala a hibás és kijavítható. Ha egyik se teljesül, akkor $\boldsymbol{x}_1$ és $\boldsymbol{x}_2$ egyike a hibás, az első egyenletből kiderül mennyivel, a másodikból, hogy melyik.

Megjegyzés
Ha a II. megoldást úgy módosítjuk, hogy $\boldsymbol{x}_3$-at és $\boldsymbol{x}_4$-et az

$$\boldsymbol{x}_3 \equiv \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \pmod 3, \qquad \boldsymbol{x}_4 \equiv 2\cdot\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \pmod 3$$

képletekkel értelmezzük, akkor épp az I. megoldásban kapott 9 kódszóhoz jutunk.

5.6 a) megoldása
$3^4 = 81$-féleképpen alakulhat a négy mérkőzés eredménye, ezért ennyi, azaz 81 szelvényt kell kitölteni a biztos telitalálat érdekében.

5.6 b) I. megoldása
Összesen 9-féleképpen lehet úgy kitölteni a totószelvényt, hogy legalább háromtalálatos legyen:
van 1 négytalálatos;
van 2 olyan, amelyen az 1., a 2., és a 3. mérkőzésre adott tipp talált (a 4. mérkőzés eredményre adott tipp kétféleképpen lehet rossz);
és még 2-2-2 olyan szelvény képzelhető el, amelyen az 1., 2., 4.; az 1., 3., 4.; illetve a 2., 3., 4. mérkőzés eredményét találtuk el.

Ezért csak 81-9=72 olyan kitöltés lehetséges, amely legfeljebb kéttalálatos. Tehát 73 szelvényt kell ahhoz venni, hogy biztosan legyen egy legalább háromtalálatos.

Megjegyzés Ez a megoldás hibás, mert nem a feltett kérdésre válaszol, hanem a következőre: hány szelvényt kell vennie a nagyon buta totózónak, ha azt akarja, hogy azokat gondolkodás nélkül, de csupa különböző módon kitöltve legyen egy legalább háromtalálatos szelvénye.

Egy gondolkodó totózó kevesebb szelvénnyel is el tud érni három (vagy több) találatot.

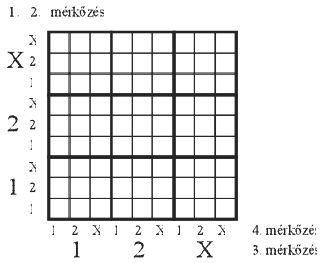
5.6 b) II. megoldása
Ha háromtalálatosat szeretnénk, a következőképpen járunk el. Mivel a negyedik tipp nem számít, csak az első hármat nézzük. Ezeket 3·3·3-féleképpen tölthetjük ki. Tehát bármilyen is a telitalálatos, biztos lesz a kitöltöttek között háromtalálatos. Így 27 szelvényt kell ehhez kitölteni.

Megjegyzés
Ez a megoldás is hibás, ugyanis nem derül ki belőle, hogy 27-nél kevesebb szelvénnyel nem oldható meg a feladat (szerencse nélkül).

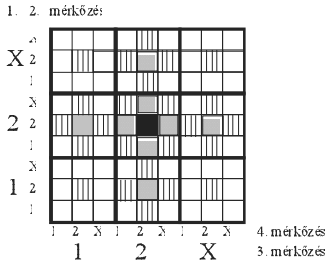
5.6 b) III. megoldása
A négy mérkőzés együttes eredményét röviden "eredmény"-nek fogjuk hívni.

Ha egy szelvényt kitöltünk, akkor 9 olyan eredmény van, amely mellett van három találatunk: a telitalálat, valamint ha a 3 mérkőzés közül pontosan egynél hibáztunk (2-féle hiba lehetséges): 1+4·2=9. Nem úszhatjuk meg tehát 81/9=9 szelvénynél kevesebbel. Nézzük meg, hogy 9 szelvénnyel boldogulhatunk-e!

A szelvények mindegyike 9 eredmény esetén nyer (azaz 3 vagy 4 találatos). Ahhoz, hogy mind a 81 lehetséges eredmény esetén legyen nyerő szelvényünk az kell, hogy egyik eredménynél se nyerjen 2 szelvény. Próbáljunk meg így kitölteni 9 szelvényt! A próbálkozáshoz egy (3×3)×(3×3)-as táblázatban ábrázoljuk a lehetséges eredményeket, illetve tippeket.

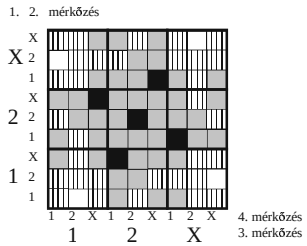


A táblázatban összesen 81 mező van, minden mező egy lehetséges eredménynek felel meg. Az, hogy az adott mező melyik "sorhármasban" van, megmondja, hogy mi az első mérkőzés végeredménye; a sorhármason belüli sor a második mérkőzés végeredményére utal; az oszlophármas a harmadik, azon belül az oszlopszám a negyedik meccs végeredményét jelzi.

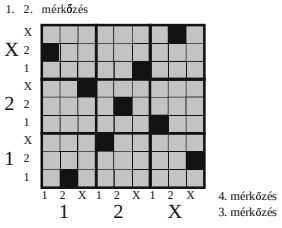


A kitöltött szelvénynek megfelelő mezőt befeketítjük. Ennél az eredménynél lenne a szelvény telitalálatos. Szürkével jelöljük azokat az eredményeket, amelyek 3 találatosak lennének. Ezeket nem szabad befeketíteni. Bevonalkázzuk azokat a mezőket, amelyek a szürkéktől csak 1 mérkőzés végeredményében térnek el. Ezeket a továbbiakban nem szabad befeketíteni, mivel minden eredménynél csak egy szelvény nyerhet (lehet 3 vagy 4 találatos).

Röviden a szabályok: a fekete mezőtől csak egy adatban eltérő mezők szürkék, a pontosan két adatban eltérők vonalazottak.



Mivel az 1-2-X eredmények egyenértékűek, és a mérkőzések egymástól függetlenek, mindegy, hogy melyik az első kitöltött szelvény, ezért szimmetria-okokból válasszuk elsőnek a középső mezőt (2222)! Ezután is tarthatjuk magunkat a szimmetriához, még 4-4 szelvény kellene, esélyünk van 90°-os forgásszimmetriára. Ezért bejelölünk a középponthoz legközelebb lévő még kitölthető szelvényt, rögtön a forgásszimmetria szerint négyet (1X21, 21X1, X12X, 2X1X).



Lám, még szerencsénk is van: a négy mező együttes bejelölése sem okoz átfedést. Mint látható, pont annyi lyuk van, amennyi szelvényt még el kell helyeznünk. Sikerült! Megelégedéssel olvashatjuk le a megfelelő tippeket:
2222
1X21, 21X1, X12X, 2X1X
X211, 1112, 12XX, XXX2
E szelvényekkel biztos a legalább 3 találat, így 9 szelvény szükséges és elégséges.

5.6 b) IV. megoldása
Az előző megoldásban elején láttuk, hogy legalább 9 szelvény szükséges, és 9 szelvény pontosan akkor oldja meg a feladatot, ha nincs olyan "eredmény", amely a 9 szelvény közül kettőtől is csak egy mérkőzés eredményében tér el. Ez épp azt jelenti, hogy a 9 szelvény 1-hiba javító kódot alkot. Ezek szerint a 4.6 feladatra adott megoldások bármelyike optimális szelvényeket szolgáltat, csak a 0-ka kell X-re cserélni.

Megjegyzés (***Tökéletes kódok***)
Tekintsünk k különböző karaktert, és a belőlük alkotható összes n hosszú sorozatok, "szavak", H halmazát. Úgy is tekinthetjük, mintha n mérkőzésünk lenne és mindegyiknek k-féle eredménye lehetne. Legyen r rögzített pozitív egész, és $h \in H$ tetszőleges szó. "h középpontú r sugarú körlapon" azoknak a szavaknak a halmazát értjük, amelyeknek h-tól való Hamming távolsága legfeljebb r. A "kódelmélész" arra törekszik, hogy minél több szót találjon úgy, hogy a köréjük írt r sugarú körlapok diszjunktak legyenek. $r = 1$ esetén pld így 1-hiba javító kódot kap. A "totózó" célja ezzel némileg ellentétes: ő szavaknak egy olyan készletét keresi, amelyek köré írt r sugarú körlapok lefednek minden szót, nem marad ki egy "eredmény" sem. Így ő olyan optimális szelvény-készletet állít elő, amellyel biztosan nyer, ha r találatot enged a telitalálatból. Bizonyos (k, n, r) számhármasoknál céljukat ugyanannyi szóval, ugyanazzal a szókészlettel érik el. Az ilyen szókészletek a tökéletes kódok.

5.7 A szenvedélyes játékosok már régóta keresik az olyan nyerőesélyes tipprendszereket, úgynevezett ***totókulcsokat***, mint amilyet az 5.6 feladatban is kerestünk. Mégis, már "kicsinek" tűnő esetekben sem ismeretes, hogy legkevesebb hány szelvény kell bizonyos számú találat eléréséhez.

Az alábbi táblázat[1] mutatja, hogy mit tudott a világ 1995-ben. n a mérkőzések számát jelöli, r pedig azt mutatja, hogy legfeljebb hány találatot engedünk ki a kezünkből. Az 5.6 feladat az $n = 4$, $r = 1$ esetnek felel meg ($k = 3$).

n/r	1	2	3
1	1		
2	3	1	
3	5	3	1
4	9	3	3
5	27	8	3
6	63-73	12-17	6
7	150-186	26-34	7-12
8	393-486	52-81	13-27
9	1048-1356	128-219	25-54
10	2818-3645	323-558	57-108
11	7767-9477	729	115-729
12	21395-27702	1919-2187	282-729
13	59049	5062-6561	609-1215

Látható, hogy elég kevés konkrét eredmény ismert. Az alábbi kérdés az egyik pontos eredményre kérdez rá.

Mutassuk meg, hogy a 13 mérkőzésből álló totón legalább 59049 szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan elérjünk legalább 12 találatot!

Megoldás
Összesen 3^{13}-féle szelvény lehetséges. Egy szelvénnyel $1 + 2 \cdot 13 = 27 = 3^3$ esetben van legalább 12 találatunk, így legalább $3^{13}/3^3 = 3^{10} = 59049$ szelvényre van szükség.

2. Házi feladat
Kíséreljünk meg konstruálni 59049 megfelelő szelvényt.

Megjegyzés
Látható, hogy $k = 3$ esetén akkor van lehetőség 1-hiba javító tökéletes kódra ($r = 1$), ha $1 + 2n = 3^s$. Ha tehát s tetszőleges pozitív egész,

$$n = \frac{3^s - 1}{2}, \qquad k = \frac{3^n}{1+2n} = \frac{3^n}{3^s} = 3^{n-s} = 3^{\frac{3^s-1}{2}-s},$$

akkor az egyszerű leszámlálás nem zárja ki tökéletes kód létezését.

[1] Forrás: H. Hämäläinen, I. Honkala, S. Lytsin, P. Östergøard, Football Pools - A Game for Mathematicians, ***American Math. Monthly***, August-Sept 1995, 579-588.

3. Házi feladat

5.9 Most is az 1, 2, 3, ...16 számok közül kell kitalálni egyet barkochba kérdésekkel. Kérdéseinket előre le kell írni és nincs befolyásunk arra, hogy a gondoló milyen sorrendben nézi és válaszolja meg azokat.[2]
Hány kérdéssel tudjuk biztosan kitalálni a gondolt számot, ha várhatóan egyszer (legfeljebb egyszer) téves választ kapunk?

4. Házi feladat

Hétszögminták Ebben a feladatban egy szabályos hétszög csúcsaira írunk 0-t vagy 1-et. Összesen $2^7=128$ ilyen kitöltés van. A kitöltések egy $\boldsymbol{I}_7$ részhalmaza "7-szögre ideális", ha
1. Ha $\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{I}_7 \Rightarrow \boldsymbol{h}$ bármely ($\boldsymbol{n}\cdot$360°/7-kal való) elforgatottja is $\boldsymbol{I}_7$-ben van.
2. Bármely két $\boldsymbol{I}_7$-beli kitöltés csúcsonként és mod 2 számított összege is $\boldsymbol{I}_7$-ben van.
A kitöltéseknek hány "7-szögre ideális" részhalmaza van?

[2] Ezzel az "Előző válaszod igaz volt?" - típusú kérdéseket akarjuk kiszűrni. Tehát kérdés nem vonatkozhat a válaszok igazságtartalmára.