

Kódelméleti elemi feladatgyűjtemény

Összállította: *Mraskó András és Szónyi Tamás*

1. Mérlegelés

1.1 Egy cég 10 szériában gyártott egész kg-os súlyokat. Az első szériában 1, a másodikban 2, a harmadikban 3, ... a tizedikben 10 kg-os súlyokat terveztek készíteni. Az azonos szériában készült egyforma súlyokat ugyanabban a ládában tartják, mind a 10 ládára rá van írva, hogy hanyadik szériában készült. Az egyik széria hibás lett, példányai egyforma súlyúak, de ez az érték nem egyezik meg az előre adott értékkel.

a) Egy kijelzős mérleg egyszeri használatával kell megtalálnunk, hogy mennyivel nehezebbek vagy könnyebbek a hibás súlyok az előírtnál.

b) Ezután határozzuk meg, hogy melyik súly szériája lett hibás!
Most is csak a kijelzős mérleget használhatjuk, és azt is csak még egyszer.

c) Próbáljuk meg általánosítani előző eredményeinket. Fontos volt-e, hogy épp 10 széria volt?
Lényeges-e, hogy rendre épp 1, 2, 3, ... 10 kg-osak a súlyok az egyes szériákban? Fogalmazzuk meg általánosan a feladatot, és adjunk választ az a), b) kérdésekre az általános esetben is!

d) Módosítunk az eredeti feladaton. Tegyük fel, hogy mindegyik súly megfelelő tömegű (az egyes szériákban rendre 1, 2, ... 10 kg), de előfordulhat, hogy amikor a ládákat a bennük lévő súlyok növekvő sorrendjében betolták a raktárba egymás mellé, akkor két szomszédos ládát felcseréltek. Ezután rakták rájuk sorban a szériaszámokat, amelyek így most növekvő sorrendben vannak, de lehet, hogy az egyik szomszédos párnál nem a ládában levő súlyok tömegét jelzik. Hány méréssel lehet megállapítani, hogy történt-e ilyen tévesztés?

1.2 Egy cég 5 szériában gyártott súlyokat. Az egyes szériákon belül mindegyik súly egyforma tömegű, de nem ismert, hogy mekkorák. Az éppen távol levő cégvezető meg szeretné tudni, hogy milyen tömegű súlyokat gyártottak. Ezért egy mérési űrlapot küld egyik alkalmazottjának, majd annak kell elvégeznie a méréseket, és visszaküldeni az eredményekkel kitöltött űrlapot.

Legalább hány mérést kell elvégezni, és mik legyenek ezek a mérések (hogyan töltsé ki a cégvezető az 1., 2., ..., 5. oszlopokat), ha várható, hogy (legfeljebb) egyszer az alkalmazott hibás értéket ír be a "Mért tömeg" rovatba?

Az űrlap így néz ki:

	Hány súly legyen az egyes szériákból a mérlegen?					Mért tömeg (kg)
	1. széria	2. széria	3. széria	4. széria	5. széria	
1. mérés						
2. mérés						
3. mérés						
4. mérés						
5. mérés						
6. mérés						
7. mérés						
8. mérés						
9. mérés						
10. mérés						
11. mérés						

2. Szójátékok

2.1 Írj az üres helyre betűt úgy, hogy értelmes magyar szót kapj! Hány megoldás van az egyes esetekben?

_AP, B_R, HA_

2.2 Oldd meg az előző feladatot angol nyelven értelmes szavakkal is!

2.3 A következő szavakban egy-egy betűt megváltoztathatsz, de értelmes magyar szót kell kapnod. Hány megoldás van az egyes esetekben?

HÁZ, KEREK

2.4 Keress olyan legfeljebb ötbetűs magyar szót, amelyben az egyik betűt sem lehet úgy megváltoztatni, hogy egy másik értelmes magyar szót kapjunk!

2.5 Keress az előző feladattípusok bármelyikében olyan példát, amelynek az adott szóhosszúság esetén a legtöbb megoldása van!

2.6 Egy négybetűs szóra gondoltam. Alább néhány tippet és a rájuk adott választ láthatod. Csak akkor jelöltem találatot, ha a betű a helyén is volt.

HÁGÓ 0, TÉLI 2, BÁNJ 1,

FÓKA 1, FALA 2.

Melyik szóra gondolhattam?

3. Kódolnak a nebulók

3.1 (*Dobos Sándor javaslata*)

A gyerekek párokat alkotnak. A pároknak az a feladata, hogy kitaláljanak egy kódrendszert, amellyel 0-tól egy általuk megnevezett n számig bármely egész számot le tudnak kódolni egymásnak öt pénzérmével az üres tanári asztalon. Gondolkodás után minden pár bemondja, hogy meddig tud kódolni (n). A legnagyobbat mondó pár egyik tagja kimegy, a másik bennmarad. A tanár mond a bennmaradónak egy számot a megadott tartományban, amit az lekódol az asztalon. Ezután a másik bejön és kitalálja a számot.

3.2 A feladat ugyanaz, mint a 3.1 feladatban azzal a különbséggel, hogy a tanár kilátásba helyezi, hogy esetleg egy pénzdarabot le fog venni az asztalról, mielőtt bejön az a nebuló, akinek ki kell találnia a számot. Most új kódrendszert, és új n korlátot kell megadnia a pároknak.

4. Kódok a gyakorlatban

4.1 (*Pálvölgyi Dömötör példája, Bergengóc példatár 2. 237. fel.*)

A budapesti telefonszámok hétjegyűek. Sokszor előfordul, hogy valaki két szomszédos számot felcserél, ezért téves a hívása. Keress minél egyszerűbb eljárást arra, hogy a hétjegyű számok végére még egy ellenőrző számot téve, a központ számcseréje (két szomszédos felcserélése) esetén jelezni tudja, hogy a szám téves, és ne kapcsoljon!

4.2 Menjünk át a könyvtárba és nézzük meg sok különböző könyv azonosítóját, az úgynevezett ISBN (International Standard Book Number) számot! Próbáljuk meg kideríteni, milyen részekből áll, hogyan épül fel ez az azonosító! (Segítség: a legutolsó jegy egy ellenőrző jegy, segítségével kiszűrhető bármelyik két számjegy felcserélése, illetve bármelyik jegy elírása. A többi jegy három csoportba osztható és a könyv azonosítására szolgál.)

4.3 Gyűjts össze rokonaid, ismerőseid személyi számát (ez nem ugyanaz, mint a személyi igazolvány száma)! Próbáld meg kitalálni hogyan épül fel ez az azonosító! (Segítség: az utolsó számjegy egy ellenőrző jegy, értéke meghatározható a többi jegyből. Az előtte álló három számjegy egy sorszám.)

4.4 Olyan adatátviteli nyelvet szeretnénk kidolgozni, amely

- I.) csak háromféle betűt használ;
- II.) minden értelmes szó három betűből áll;
- III.) Ha egy értelmes szóból csak egy betűt nem ismerünk (de tudjuk, hogy hanyadikat), akkor azt már ki tudjuk találni a többi betűjéből.

Legfeljebb hány értelmes szó lehet egy ilyen nyelvben?

4.5 Bizonyítsd be, hogy egy kód pontosan akkor 1-hiba javító, ha bármelyik két kódszó legalább három helyen különbözik egymástól!

4.6 Keress háromféle betű alkalmazásával minél több szóból álló négybetűs 1-hibajavító kódot!

4.7 Összehasonlítunk három kódot! Mindhárom kód kilenc szóból áll, mindegyik egy hárombetűs ABC-t használ.

k₁) A legegyszerűbb: A szavak kétbetűsek, a kilenc kódszó az összes kétbetűs szó.

k₂) Mindent háromszor: A szavak hatbetűsek és úgy készülnek, hogy a kétbetűs szót háromszor írjuk le egymás után.

k₃) A sűrű: A szavak négybetűsek, a 4.6 feladatban meghatározott 1-hiba javító tökéletes kódot alkotják.

Tegyük fel, hogy egy betű a kommunikáció során 10% eséllyel megváltozik és 90% eséllyel jól továbbítódik. k_2 és k_3 esetén a kiolvasott jelsorozatot mindig a tőle legkevesebb jelben eltérő kódszóra változtatjuk. Ha ez nem egyértelmű, akkor nem javítunk. Határozzuk meg a három esetben külön-külön, hogy mi az esélye, hogy egy szót úgy olvasunk ki, ahogy elküldték!

4.8 Legyen most a betűhiba esélye q , a hibátlan betűé pedig $p = 1 - q$. (A 4.7 feladatban $p = 0,9$, $q = 0,1$ volt.) Tekintsük át p minden lehetséges értékét és rakjuk sorrendbe a k_1 , k_2 és k_3 kódokat aszerint, hogy melyiknél esélyesebb egy szó helyes kiolvasása!

4.9 Keress kétféle betű alkalmazásával minél több szóból álló k -betűs 1-hibajavító kódot, $k = 1; 2; \dots; 6$ esetén! Töltsd ki az alábbi táblázatot!

szavak hossza (k):	1	2	3	4	5	6
kódszavak száma:						

4.10 Ha adott egy négyzet alakú H_i számtáblázat, akkor elkészíthetjük a kétszer akkora oldalhosszúságú

$$H_{2i} = \begin{pmatrix} H_i & H_i \\ H_i & -H_i \end{pmatrix}$$

számtáblázatot. Induljunk ki az 1×1 -es $H_1 = (1)$ "számtáblázat"-ból, és képezzük a

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

majd a H_4, H_8, H_{16}, H_{32} számtáblázatokat. H_{32} -nek már 32 sora van, mindegyikben egy 32 hosszú számsorozat, csupa 1-gyel és (-1)-gyel. Tekintsük ezt a 32 sorozatot és (-1)-szereseit. Álljon kóduink ebből a 64 sorozatból, csak a (-1)-eket cseréljük ki 0-kra. Határozzuk meg az így kapott bináris kód minimális távolságát!¹

4.11 Bizonyítsd be, hogy egy kód pontosan akkor

- a) k -hiba javító, ha minimális távolsága legalább $2k+1$;
- b) k -hiba jelző, ha minimális távolsága legalább $k+1$;
- c) k -törlés javító, ha k -hiba jelző!

¹ Ennek a kódnak az alkalmazásával küldte a fényképeket a Mariner 10 szonda a Földre. A 64 sorozat 64 színnek felelt meg, egy sorozat egy képpont (pixel) színét határozta meg.

5. Barkochbák, totók, játékos feladatok

5.1 (*Dobos Sándor példája*)

Számrontó Rezsőnek két módszere van egy szám elrontására. Vagy egy számjegyet tetszőlegesen megváltoztat (pld. 5437→5487), vagy két számjegyet kicserél (pld. 5437→3457). Egyszer véletlenül az asztalon hagytam egy cetlit a másológép négyjegyű belépési számával. Rezső ezt meglátta és rögtön átjavította 1323-ra. Szerencsére észrevettem, és visszajavítottam az eredeti számra. De, amikor legközelebb lehetősége adódott Rezső megint elrontotta a cetlin lévő számot, így most 1213 van ráírva. Mi lehet a másológép belépési száma?

5.2 Egy hajó és utasai, összesen 100 fő, Ungabunga szigetén az emberevők fogságába esett. Tudják, hogy másnap reggel a kannibálok leültetik őket egymás mögé, és mindegyikük fejére egy-egy piros vagy kék sapkát húznak. Mindenki csak az összes előtte ülő ember fején lévő sapkát fogja látni, a sajátját és a mögötte ülőket nem. A leghátsó embertől kezdve sorban mindenki hangosan mondhat majd egy színt: pirosat vagy kéket. A végén azt engedik szabadon, aki saját sapkája színét mondta, aki nem találta el, azt bizony megeszik. A kannibálok szigorúak, ha bárki mást tesz, minthogy a lehető legegyszerűbben kimondja a "piros" vagy a "kék" szót, akkor senkinek sem kegyelmeznek.

A foglyoknak még egy esélye van. Most este még összebeszélhetnek. Szeretnék, hogy minél többen megszabaduljanak. Hány fogoly tud biztosan megmenekülni?

Könnnyítés: oldjuk meg előbb a feladatot abban az esetben, ha tudjuk, hogy összesen pontosan

a2) két;

a10) tíz;

piros sapka van a 100 között!

5.3 Gondoljuk végig az 5.2 feladatot kettő helyett három színnel! Minden rab fején háromféle sapka lehet, és mindenki háromféle színt is mondhat.

5.4 Lépünk tovább az 5.2-5.2 feladatokkal! Mi a helyzet n szín esetén?

5.5 A térbeli sakktáblán a bástya a tábla oldaléleivel párhuzamosan tud lépni. Legfeljebb hány bástya helyezhető el a táblán úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást, ha a tábla

a) 3×3 -as?

b) 8×8 -as?

5.6 Bergengóciában a totó, a bajnokságnak megfelelően csak 4 mérkőzést tartalmaz. Minden mérkőzés eredményére háromféleképpen lehet tippelni: 1-gyel, 2-vel vagy X-szel. Egy szelvényen csak egy tipposzlop van.

a) Hány szelvényt kell venni ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatunk?

b) És ahhoz, hogy biztosan legyen olyan szelvényünk, amely legalább 3 találatos?

5.7 A szenvedélyes játékosok már régóta keresik az olyan nyerőesélyes tipprendszereket, úgynevezett *totókulcsokat*, mint amelyet az 5.6 feladatban is kerestünk. Mégis, már "kicsinek" tűnő esetekben sem ismeretes, hogy legkevesebb hány szelvény kell bizonyos számú találat eléréséhez.

Az alábbi táblázat² mutatja, hogy mit tudott a világ 1995-ben. n a mérkőzések számát jelöli, r pedig azt mutatja, hogy legfeljebb hány találatot engedünk ki a kezünk közül. Az 5.6 feladat az $n = 4$, $r = 1$ esetnek felel meg.

n/r	1	2	3
1	1		
2	3	1	
3	5	3	1
4	9	3	3
5	27	8	3
6	63-73	12-17	6
7	150-186	26-34	7-12
8	393-486	52-81	13-27
9	1048-1356	128-219	25-54
10	2818-3645	323-558	57-108
11	7767-9477	729	115-729
12	21395-27702	1919-2187	282-729
13	59049	5062-6561	609-1215

Látható, hogy elég kevés konkrét eredmény ismert. Az alábbi kérdés az egyik pontos eredményre kérdez rá.

Mutassuk meg, hogy a 13 mérkőzésből álló tótón legalább 59049 szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan elérjünk legalább 12 találatot!

5.8 a) Az 1, 2, 3, ... 16 számok közül kell kitalálni egyet barkochba kérdésekkel. Legalább hány kérdésre van szükség?
b) És ha a kérdéseket előre le kell írni, azaz a következő kérdés nem függhet az előzőre kapott választól?

5.9 Most is az 1, 2, 3, ... 16 számok közül kell kitalálni egyet barkochba kérdésekkel. Kérdéseinket előre le kell írni és nincs befolyásunk arra, hogy a gondoló milyen sorrendben nézi és válaszolja meg azokat.³
Hány kérdéssel tudjuk biztosan kitalálni a gondolt számot, ha várhatóan egyszer (legfeljebb egyszer) téves választ kapunk?

5.10 (Dienes Péter javaslata)

Hanyag Hugó az 1, 2, 3, ..., 16 számok egyikére gondolt. Egy-egy cetlire kell fölírni kérdéseinket, s mind odaadni neki, majd amikor ráér egyszerre mindegyikre válaszol fog. De lehet rá számítani, hogy az egyik választ elveszti mielőtt az eljutna hozzánk. Legalább hány kérdésre van így szükség ahhoz, hogy kitaláljuk a gondolt számot?

5.11 (Juhász Istvántól és Szegedy Balázstól is hallottam)

Egy kém az ellenséges ország televíziójánál dolgozik. Esténként alkalma van az adásba kerülő 8×8-as fekete fehér tábla egyetlen mezőjének színét megváltoztatni. Nem feltétlenül szükséges változtatnia. Sajnos sohasem tudja előre, hogy milyen mintázatú lesz a 64 mező, amikor eléje kerül. Hányféle információt tud így küldeni a TV-n keresztül?

² Forrás: H. Hämmäläinen, I. Honkala, S. Lytsin, P. Östergård, Football Pools - A Game for Mathematicians, *American Math. Monthly*, August-Sept 1995, 579-588.

³ Ezzel az "Előző válaszod igaz volt?" - típusú kérdéseket akarjuk kiszűrni. Tehát kérdés nem vonatkozhat a válaszok igazságtartalmára.

6. "Ideális halmazok" – polinomkódok

6.1 Négyzetminta

Egy négyzet csúcsaiba egy-egy egész számot írtunk, majd mindegyik csúcs mellé még odaírtuk az abba a csúcsba írt számnak a szomszédos csúcsokba írt számokkal vett összegét. Hány páratlan szám lehet az így kapott nyolc szám között? Adjuk meg az összes lehetőséget!

6.2 Jó-30-as

Az egész számok egy I_{30} részhalmazát "jó 30-as"-nak nevezzük, ha teljesülnek rá az alábbi feltételek:

1. Ha $h \in I_{30}$ és n tetszőleges egész szám, akkor $n \cdot h \in I_{30}$.
2. Ha $h_1 \in I_{30}$ és $h_2 \in I_{30}$, akkor $h_1 + h_2 \in I_{30}$.
3. $30 \in I_{30}$.

Az egész számok halmazának hány "jó 30-as" részhalmaza van?

6.3 "Ideális 101-es"

Ebben a feladatban a természetes számok bizonyos részhalmazait keressük. A számokat mindig kettes számrendszerben leírva képzeljük, illetve alább így is említjük őket. Két számot nem a szokásos módon adunk össze, hanem kettes számrendszerbeli alakjuk megfelelő jegyeit modulo 2, és átvitel nélkül adjuk össze (pld $1100110 + 10011 = 1110101$). A természetes számok (pontosabban azok kettes számrendszerbeli alakjainak) egy I_{101} részhalmazát "ideális 101-es"-nek nevezzük,

1. ha $h \in I_{101} \Rightarrow h0 \in I_{101}$; ($h0$ a h dupláját, tehát azt a számot jelöli, amelyet úgy kapunk, hogy h mögé írunk egy 0-t)
2. ha $h \in I_{101}$ és $j \in I_{101} \Rightarrow h + j \in I_{101}$;
3. ha $101 \in I_{101}$ (itt 101 az egy-nulla-egy számot, azaz az 5-öt és nem a százegyét jelenti).

a) Hány "ideális 101-es" részhalmaza van a természetes számok halmazának?

b) Oldjuk meg az "ideális 101-es" feladatot 101 helyett mindenütt 1001-gyel!

6.4 Hétszögminták

Ebben a feladatban egy szabályos hétszög csúcsaira írunk 0-t vagy 1-et. Összesen $2^7=128$ ilyen kitöltés van. A kitöltések egy I_7 részhalmaza "7-szögre ideális", ha

1. Ha $h \in I_7 \Rightarrow h$ bármely ($n \cdot 360^\circ/7$ -kal való) elforgatottja is I_7 -ben van.
2. Bármely két I_7 -beli kitöltés csúcsonként és mod 2 számított összege is I_7 -ben van.

A kitöltéseknek hány "7-szögre ideális" részhalmaza van?