T. 240

A diákok 17 kétjegyű pozitív egész számot írtak a táblára. Kiderült, hogy az egyik szám századik hatványa osztható a 17 szám mindegyikével. Bizonyítsd be, hogy ebben az esetben az is igaz, hogy ez a hatvány osztható a 17 szám szorzatával is!

Megoldás. Legyen N az a felírt szám, amelynek századik hatványa minden másik számmal osztható, és legyen p az N-nek tetszőleges prímosztója.

Ha $p>2$, akkor p kitevője a 16 felírt számban legfeljebb 4 lehet, hiszen már $p^5 \geq 3^5=243$, ami pedig túl nagy, hogy egy kétjegyű szám osztója lehessen. Ez esetben p kitevője a számok szorzatában legfeljebb $4 \cdot 17=68$, és ez kisebb, mint p kitevője N^{100}-ban, ami természetesen legalább 100 lesz.

Ha viszont $p=2$, akkor p kitevője a egy-egy felírt számban legfeljebb 6, mert $2^7=128>100$. Két esetet különböztetünk meg. Ha N nem osztható 4-gyel, akkor a 2 kitevője a számok szorzatában legfeljebb $6 \cdot 16+1=97$, ami kisebb, mint a kitevő N^{100}-ban, a 100. Ha pedig N 4-gyel osztható, akkor ez a kitevő legfeljebb $6 \cdot 17=102$, holott N legalább $2 \cdot 100 = 200$-as kitevővel rendelkezik.

Vagyis akárhogyan is adottak a számok, szorzatukban minden prím legfeljebb akkora kitevőn szerepel, mint x^{100}-ban, és ebből következik a kívánt oszthatóság.