T. 265

Egy pozitív törtszámot „rossznak” nevezünk, ha nem állítható elő az

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, , \frac{1}{3\cdot 4}, ..., \frac{1}{n\cdot(n+1)}, ...$$

sorozat elemei közül véges soknak az összegeként. Igaz-e, hogy az $\frac{1}{1996}$*-nál kisebb „rossz” törtek véges sokan vannak?*

Megoldás. Felhasználjuk az

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

azonosságot, aminek igazságáról közös nevezőre hozással győződhetünk meg. Ezek szerint

$$\frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + ... + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \pm ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

teljesül, ha $m < n$ pozitív egészek. Ebből adódik, hogy tetszőleges pozitív egész *a*-ra $\frac{a}{m} - \frac{a}{n}$ mindig előáll a számsorozat véges számú tagjának összegeként. Válasszuk $a = m$ Válasszuk a=m-et! Ezzel minden $1 - \frac{m}{n}$ alakú törtet előállítottuk, ahol $m < n$, és akármelyik 0 és 1 közötti racionális szám felírható ilyen alakban! Tehát az $\frac{1}{1996}$-nál kisebb törtek között nincs rossz tört, véges sokan vannak a rossz törtek.