T. 268

Néhány (nem feltétlenül különböző) pozitív egész szám összege 1996. *Lehet-e a reciprokaik összege éppen* 1*?*

Első megoldás. Igen, lehetséges. Vegyünk egy darab 4-est, 14 darab 28-ast és 20 darab 80-ast. Ekkor mivel

$$1\cdot 4 + 14\cdot 28 + 20\cdot 80 = 4 + 392 + 1600 = 1996$$

és

$$\frac{1}{4}+14\cdot\frac{1}{28}+20\cdot\frac{1}{80}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1,$$

ezért a kapott megoldás megfelel.

(Az előbbi megoldást a következőképpen lehet megtalálni. Az egyszerűség kedvéért n darab $\frac{1}{n}$-es törtből szeretnénk kiindulni, majd az $\frac{1}{n}$-eket még több egyenlő részre osztani. Mivel ekkor a nevezők összege (ami 1996) osztható lesz n-nel, és $1996=4\cdot 499$ és a 499 prím, ezért célszerű kis n-et választani, legyen n=4.

Bontsuk a négy darab $\frac{1}{4}$-et a, b, c, d részre. Ekkor a nevező összege:

$$a\cdot(4a)+b\cdot(4b)+c\cdot(4c)+d\cdot(4d)=1996,$$

ezt az egyenletet 4-gyel leosztva

$$a^2+b^2+c^2+d^2=499$$

adódik. Könnyű (akár próbálgatással is) ezután megtalálni az $a=1, b=c=7, d=20$ számnégyest: 400+49+49+1=499.)

Második megoldás. Legyen S „jó” szám, ha létezik néhány 1 összegű, 1 számlálójú tört, melyek nevezőinek összege S.

Tegyük fel, hogy S jó szám. Ha S törtre bontásában mindegyik törtet a felére cserélünk, azaz a nevezőket mind megszorozzuk 2-vel, akkor a törtek összege $\frac{1}{2}$ lesz, így még egy $\frac{1}{2}$-et melléjük rakva, a törtek összege ismét 1 lesz. Eközben nevezőik összege S-ről $(2S+2)$-re változott. Vagyis ha S jó szám, akkor a $(2S+2)$ is. (A)

Hasonlóan, ha minden törtet megfelezünk, majd az $\frac{1}{2}$ helyett az $\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{6}$-ot vesszük hozzá, akkor a nevezők összege $(2S+9)$ lesz. Ezért ha S jó szám, akkor $(2S+9)$ is jó szám lesz. (B)

Ahhoz, hogy belássuk, hogy 1996 jó szám, elegendő megmutatni, hogy néhány (A) és (B) típusú lépéssel előállítható az 1996 egy ismert jó számból.

Visszafelé gondolkozva: 1996 páros, így (A)-t alkalmazva, elég belátni, hogy (1996-2)/2=997 jó szám. Mivel páratlan, így a 997 a (997-9)/2=494-ből állhat elő, (B) módon. Ezt folytatva, elég belátni, hogy 246, 122, 60, 29, 10, 4, 1 jó szám. Mivel az 1 triviálisan jó szám (1=1/1), ezért a megfelelő lépésekkel kapjuk, hogy az 1996 is jó szám.

(Utóbbi megoldás lehetőséget ad jelentős mértékű általánosításra is.)