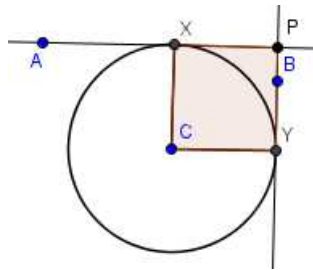


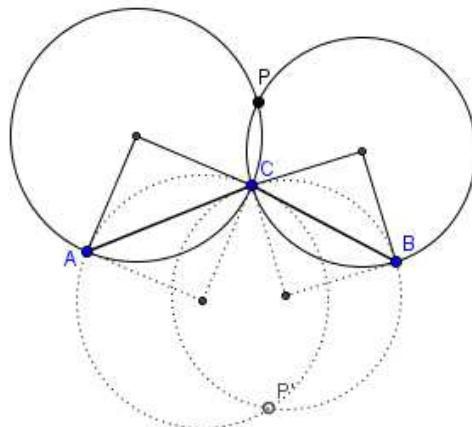
Adott a síkon az A , a B és a C pont. Szerkessz olyan C középpontú kört, amelynek (egyik) A -t tartalmazó érintője merőleges az (egyik) B -t tartalmazó érintőjére!

Megoldás. A keresett körhöz A -ból és B -ből húzott érintők érintsék azt rendre az X és Y pontokban, továbbá legyen P az AX és BY érintők metszéspontja. Azt szeretnénk, hogy XPY szög derékszög legyen. Mivel egy kör középpontját egy érintési ponttal összekötő szakasz merőleges a kör érintőjére, így kapjuk, hogy $PXCY$ négyszög minden szöge derékszög, ám mivel $CX=CY$ a kör sugarából, azért $PXCY$ négyzet lesz. A szerkesztés tehát azzal egyenértékű, hogy szerkesszünk olyan $PXCY$ négyzetet, melynek PX egyenesén van az A pont, illetve PY egyenesén van B .



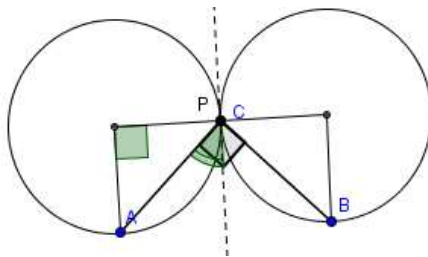
Figyeljük meg, hogy az AP egyenest CP -be forgatva, majd a CP egyenest BP -be forgatva, összesen 90° -kal forgattunk. Más szóval, az APC és CPB irányított szögek összegének nagysága 90° . (Például a T. 264 feladat megoldása során is irányított szögeket alkalmaztunk.) Azt is tudjuk, hogy az AP vagy BP egyenes és a CP egyenes hajlásszöge 45° -os, hisz egy négyzet oldalának, illetve átlójának szöge. Emiatt két esetünk van: ha az APC és CPB irányított szögek mindkettőn $+45^\circ$ -osak, vagy mindkettőn -45° -osak lehetnek.

A kerületi szögek tételének megfordítása szerint azon P pontok helye a síkon, melyekre mondjuk APC irányított szög $+45^\circ$, éppen egy AC -t tartalmazó kör. A kerületi és középponti szögek tétele szerint ez a kör szerkeszthető is, ha vesszük azt az O pontot, melyre $OA=OC$ és AOC derékszög. (Az előjel aszerint változik, hogy az AC szakasz melyik oldalára vesszük fel az O pontot.)



Ha az APC és CPB szögek $+45^\circ$ -osak, akkor az AC és CB szakaszokra egy-egy ilyen kört fogunk rajzolni, majd ezeknek metszéspontja lesz a keresett P pont. Biztosan van közös pontjuk, hisz már C közös pont, ám lehet, hogy épp nem kapunk megfelelő P pontot, ez csak akkor lehet, amikor a két körnek csak C lesz közös pontja, azaz C -ben érintik egymást. Az

érintőszárú kerületi és középponti szögek tétele szerint azonban ez csak akkor fordulhat elő, ha AC és BC merőleges. A -45° -os esetben is így szerkeszthetünk, és itt is vagy van másik P metszéspontja a két körnek, vagy pedig érintik egymást, és ez ismét pontosan akkor következik be, ha AC és BC merőleges.



A P pontot megkapva, a $PXCY$ négyzetet megszerkeszthetjük, így a keresett kör is adódik.

Összefoglalva, két megoldásunk is van, ha AC és BC nem merőleges, illetve nincs megoldás, ha AC és BC merőlegesek.