T. 286

1, 5, 25, 125, ... 5^{997} grammos súlyaink vannak, mindegyikből 2-2, összesen tehát 1996 darab. Meg tudunk-e mérni ezek és egy kétkarú mérleg segítségével minden olyan egész gramm tömegű tárgyat, amely nem nehezebb, mint 1996 darab súlyunk összesen?

Megoldás. Igen, meg bírjuk mérni. Ehhez célszerű az ötös számrendszert használni.

Legyen $M = 2 \cdot \left(1 + 5 + \cdots + 5^{997}\right)$ a súlyok összege, és legyen a tárgy tömege $m \leq M$. Tekintsük az $m + M$ szám ötös számrendszerbeli alakját, mivel $m + M \leq 2M < 5^{998}$, ezért ez legfeljebb 998 számjegyű felírás:

$$m + M = \overline{a_{997} a_{996} \cdots a_1 a_0}_{(5)} = a_{997} \cdot 5^{997} + \cdots + a_1 \cdot 5 + a_0 .$$

Ahhoz, hogy kimérhető legyen a tárgy, azt kell belátni, hogy létezik a súlyoknak olyan elhelyezése, melyben a tárggyal együtt a mérleg egyensúlyba kerül (azaz a súlyok 2^{1996}-féle lehetséges elhelyezésének végigpróbálgatásával megmérhető a tárgy). A két serpenyőt nevezzük *A*-nak és *B*-nek, tegyük *B*-be a tárgyat. Tetszőleges k=0,1,…,997-re az 5^k tömegű súlyokat a következőképp helyezzük el:

- ha $2 \leq a_k < 5$, akkor *A*-ba tegyünk a_k-2 darab súlyt,
- ha $0 \leq a_k < 2$, akkor *B*-be tegyünk 2-a_k darab súlyt.

Ezzel az elhelyezéssel a mérleg egyensúlyba kerül, hiszen ekkor a tárgy tömege az A-ba és B-be helyezett súlyok tömegének különbsége lesz, ami éppen

$$\begin{aligned}
&\left(a_{997} - 2\right) \cdot 5^{997} + \cdots + \left(a_1 - 2\right) \cdot 5^1 + \left(a_0 - 2\right) \cdot 5^0 = \\
&= \left(a_{997} \cdot 5^{997} + \cdots + a_1 \cdot 5 + a_0\right) - 2 \cdot \left(1 + 5 + \cdots + 5^{997}\right) = \\
&= \left(m + M\right) - M = m,
\end{aligned}$$

ahogy akartuk.

Tehát a mérés mindig elvégezhető.