T. 288

Mutasd meg, hogy ha $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$, *akkor* $(x+y)(y+z)(z+x)=0$.

I. megoldás. Kiszorozzuk a két egyenlet bal oldalát:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)=x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+3xyz,$$
$$(x+y)(y+z)(z+x)=x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+2xyz.$$

Ezekből leolvasható a bizonyítandó állítás.

II. megoldás. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned}
&0=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=\\
&(x+y)(xy+yz+zx)+z(xy+yz+zx)-z(xy)=\\
&(x+y)((y+z)x+yz)+z(yz+zx)=\\
&(x+y)(y+z)x+(x+y)yz+(x+y)z^2=\\
&(x+y)(y+z)(z+x).
\end{aligned}$$

III. megoldás. Az $f(x,y,z)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$ polinom nyilvánvalóan lenullázódik, ha $x=-y$, $y=-z$ vagy $z=-x$. A gyöktényező kiemelhetőségére vonatkozó tétel szerint ekkor kiemelhető f-ből az $(x+y)(y+z)(z+x)$ szorzat. Mivel f harmadfokú, ezért a kiemelés után csak egy (nemnulla) c konstans maradhat. Tehát ha f nulla, akkor $(x+y)(y+z)(z+x)$ is nulla lesz.