**1.** Oldja meg az alábbi egyenletet a racionális számok halmazán!

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot(2x-2)\cdot(2x-3)\cdot(2x-4) \qquad \text{(6 pont)}$$

**Megoldás.** $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot(2x-3)\cdot 2\cdot(x-2)$, amiből adódik, hogy $x_1=1$, illetve $x_2=2$ megoldások. (2 pont)

Ha $x\neq 1$ és $x\neq 2$, akkor

$$(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot 2\cdot(2x-3)\cdot 2,$$

azaz

$$x^2-7x+12=16x^2-32x+12,$$

ezt az egyenletet rendezve:

$$0=15x^2-25x, \quad \text{azaz} \quad 0=x(3x-5),$$

amiből $x_3=0$ és az $x_4=\dfrac{5}{3}$ gyököket kapjuk, (3 pont)
amik szintén megoldások a megadott alaphalmazon. (1 pont)

*Megjegyzés:* Ha elvégzi a beszorzásokat és rendez, akkor a

$$0=15x^4-70x^3+105x^2-50x$$

egyenletet kapja, amiből $0=x\big(3x^3-14x^2+21x-10\big)$, tehát az egyik gyök $x_1=0$. (1 pont)

A $0=3x^3-14x^2+21x-10$ egyenlet megoldása:

1) racionális gyökteszt alkalmazásával vagy próbálgatással könnyen adódik például az $x_2=1$ megoldás, (2 pont)
2) majd a másodfokú egyenlet megoldásával vagy további gyökteszttel a többi gyök ügyes csoportosítással például:

$$0=3x^3-3x^2-11x^2+11x+10x-10=3x^2(x-1)-11x(x-1)+10(x-1)=$$
$$=(x-1)\cdot\big(3x^2-11x+10\big),$$

és innen befejezhető a megoldás. (3 pont)