5. Melyik a legnagyobb n természetes szám, amelyre $5^{(2^{2013})} - 1$ osztható 2^n-nel? (10 pont)

Megoldás. Alakítsuk szorzattá a $5^{(2^{2013})} - 1$ számot!

Használjuk a két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosságot!

$$5^{(2^k)} - 1 = 5^{(2^{k-1} \cdot 2)} - 1 = \left(5^{(2^{k-1})}\right)^2 - 1 = \left(5^{(2^{k-1})} - 1\right)\left(5^{(2^{k-1})} + 1\right). \qquad \text{(2 pont)}$$

Ennek ismételt alkalmazásával:

$$5^{(2^{2013})} - 1 = \left(5^{(2^{2012})} + 1\right)\left(5^{(2^{2011})} + 1\right)\left(5^{(2^{2010})} + 1\right) \ldots \left(5^2 + 1\right)(5 + 1)(5 - 1). \qquad \text{(4 pont)}$$

Mivel az 5 négyes maradéka 1, ezért bármely hatványának a négyes maradéka 1. Ezért az $5^m + 1$ $(m \in \mathbb{N})$ négyes maradéka 2, azaz néggyel nem osztható páros szám. Így az első 2013 darab tényező mindegyike osztható 2-vel, de 4-gyel nem. Az utolsó tényező pedig $4 = 2^2$, így n lehetséges legnagyobb értéke 2015. (4 pont)