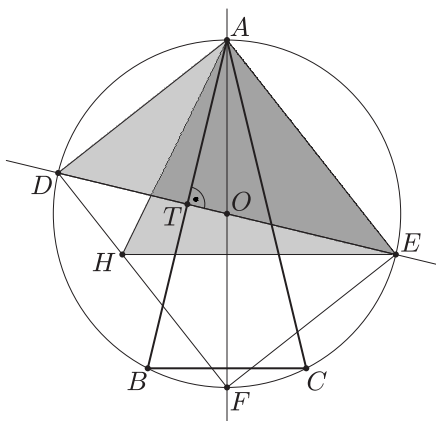


5. Az ABC egyenlőszárú háromszög AB szára a háromszög köré írt körének O középpontjától $\sqrt{19}$ egység távolságra van, a köré írt kör sugara 10 egység. A BC alap felezőmerőlegese a körülírt kört az F pontban metszi, az AB szár felezőmerőlegese és a körülírt kör metszéspontjai a D és E pontok (D a rövidebbik AB íven helyezkedik el). Az E -re illeszkedő BC -vel párhuzamos egyenes a DF szakaszt a H pontban metszi. Mennyi az AHE háromszög területe? (10 pont)

Megoldás.



Az $ADFE$ négyszög téglalap, mert átlói egyenlő hosszúak, és felezik egymást (vagy mivel a Thalész-tételt minden csúcsára és szemközti átlójára, mint átmérőre alkalmazhatjuk). (2 pont)

Az AHE háromszög területe ugyanakkora, mint az ADE háromszög területe, ugyanis az AE alapjuk azonos és az AE párhuzamos a DF -fel. Így ehhez az oldalhoz tartozó magasságuk egyenlő. (2 pont)

Jelöljük az AB szár felezéspontját T -vel. Az ADE területe kétszerese az ADO területének, mert AT magasságuk egybeesik, és DO és OE egyenlő hosszú, mivel mindkettő sugara a körnek. (2 pont)

Tehát

$$T_{AHE} = 2T_{ADO} = 2 \frac{AT \cdot OD}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az ATO háromszög derékszögű, mert a T felezéspont talppontja az AB oldal felezőmerőlegesének. A Pithagorasz-tételt felírva az ATO háromszögre: (1 pont)

$$AT = \sqrt{100 - (\sqrt{19})^2} = 9. \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát

$$T_{AHE} = 2T_{ADO} = 9 \cdot 10 = 90. \quad (1 \text{ pont})$$