

## 8. évfolyam

1. Mutassuk meg, hogy az  $x^2 - 4x + 3 = 3$  egyenlet gyökeinek szorzata 0!

Pontozás:

Rendezéssel:  $x^2 - 4x = 0$  2 pont

Kiemeléssel:  $x(x - 4) = 0$  3 pont

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha bármely tényezője 0. 2 pont

Az előző teljesül, ha  $x = 0$ , vagy  $x = 4$  2 pont

A gyökök szorzata, valóban 0:  $0 \cdot 4 = 0$  1 pont

2. Egy kerek asztal körül öten ülnek, és egymás után azt mondják: „Tőlem jobbra is és balra is hazug ember ül”. Tudjuk, hogy a hazugok soha nem mondanak igazat, az igazak pedig sohasem hazudnak, valamint mindenki tudja a szomszédairól, hogy azok hazugok-e, vagy igazmondók.

Hány hazug ember ülhet az asztal körül?

Pontozás:

Két igaz nem ülhet egymás mellett, mert akkor az állítás nem hangozhatna el. 3 pont

Három hazug sem ülhet egymás mellett, mert akkor a középső nem mondhatná el az állítást. 3 pont

Tehát 3 hazug ember ülhet az asztalnál. 2 pont

Ez meg is valósítható, ha sorban így ülnek:  
hazug- hazug- igazmondó- hazug- igazmondó. 2 pont

3. Petra választott három egymást követő pozitív egész számot. Közülük két-két számot minden lehetséges módon összeszorozott. Lehet-e a három szorzat összege 3 000 000?

Pontozás:

Legyenek a számok:  $a - 1$ ;  $a$ ;  $a + 1$ , ahol  $a \geq 2$  2 pont

Az összeg:  $(a - 1)a + a(a + 1) + (a - 1)(a + 1) = 3000000$  2 pont

$3a^2 - 1 = 1000000$  3 pont

$3a^2 = 1000001$

Mivel a bal oldali kifejezés osztható 3-mal, a jobb oldal nem, így nincs olyan  $a$  szám, melyre a feltétel teljesülne. 3 pont

4. Egy egyetemista 5 év alatt összesen 31 vizsgát tett le. Minden évben több vizsgája volt, mint az azt megelőző évben. Az ötödik évben háromszor annyi vizsgát tett le, mint az elsőben. Hány vizsgája volt a negyedik évben?

Pontozás:

Az első évben legyen  $n$  darab vizsgája, akkor az ötödik évben  $3n$  vizsgája van, a közbülső években legalább  $(n+1); (n+2); (n+3)$  2 pont

Vizsgálainak száma  $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + 3n \leq 31$ , azaz

$n \leq 3$  3 pont

Ha  $n=1$ , vagy  $=2$  akkor nem lehet összesen 31 vizsgája. 2 pont

Ha  $n=3$ , akkor az ötödik évben 9 vizsgája volt, a közbülső években összesen 19.

Ez kétféleképpen lehetséges:

1 évben	2. évben	3. évben	4. évben	5. évben
3	5	6	8	9
3	4	7	8	9

2 pont

Tehát a negyedik évben 8 vizsgája volt az egyetemistának. 1 pont

5. Adottak a koordináta-rendszerben az  $A(0;0)$ ,  $B(5;0)$ ,  $C(3;2)$ ,  $D(0;1)$  pontok. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög átlói  $45^\circ$ -os szöget zárnak be egymással!

Pontozás:

Egészítsük ki az ábrát az  $E(3;3)$  ponttal, így a DACE négyszög paralelogramma, ezért AC párhuzamos DE. 3 pont

Az EDB szög egyállású a keresett szöggel. 2 pont

Az EDB háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, mivel DE és EB egy-egy 2-szer 3-as téglalap átlója; 2 pont

D pedig B  $90^\circ$ -os elforgatottja E körül. 2 pont

Így a keresett szöggel egyállású szög  $45^\circ$ -os, tehát az átlók  $45^\circ$ -os szöget zárnak be egymással. 1 pont