

Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
Döntő
8. osztály
2010

1. Van négy edényünk. Az első háromban víz van, a negyedik üres. A másodikban kétszer annyi víz van, mint az elsőben és a harmadikban kétszer annyi víz van, mint a másodikban. Ha a negyedik edénybe átöntjük az első edényből a víz felét, a másodikból a víz harmadát és a harmadikból a víz negyedét, akkor a negyedik edényben 26 l víz lesz. Hány liter víz van az összes edényben együttvéve?

2. Ábel egy papírra egymás után egész számokat írt. A következőt az előzőből úgy kapta, hogy felváltva kettővel szorozta, illetve levont hármat. Például az 1; 2; -1; -2; -5; -10 számsorozat eleget tesz a feltételnek, de a 10; 7; 4; 8; 16; 32 számsorozat nem tesz neki eleget. Egy idő múlva összeadta az utolsónak leírt öt számot, 114-t kapott. Melyik 5 számot adta össze?

3. Adottak a koordináta-rendszerben az $A(0;0)$, $B(5;0)$, $C(3;2)$, $D(0;1)$ pontok. Bizonyítsuk be, hogy az ABCD négyszög átlói 45° -os szöveget zárnak be egymással!

4. Gondoltunk egy pozitív egész számra, melyben nagyobb számjegy nem előz meg kisebb számjegyet. Számjegyeinek minden lehetséges módon való felcserélésével további öt különböző számot lehet képezni. Ha az utóbbi öt számot hozzáadjuk az eredeti számhoz, akkor 4218-at kapunk. Mely számra gondolhattunk?

5. Bizonyítsuk be, hogy ezer egymás utáni természetes szám összege nem lehet prímszám!

Megoldásvázlat, pontozási javaslat

1. Legyen az edényekben rendre x liter, $2x$ liter, $4x$ liter víz. 1 pont

A feltétel szerint: $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + x = 26$. 4 pont

Az egyenletet megoldva: $x = 12$ 3 pont

Az elsőben 12 liter, a másodikban 24 liter, a harmadikban 48 liter 1 pont

víz volt, ez összesen 84 liter. 1 pont

2. Első lehetőség:

x ; $2x$, $2x - 3$; $4x - 6$; $4x - 9$ 2 pont

Az összeg: $13x - 18 = 114$ 1 pont

Ebből $x = \frac{132}{13} \notin Z$ 1 pont

Második lehetőség:

x ; $x - 3$, $2x - 6$; $2x - 9$; $4x - 18$ 2 pont

Az összeg: $10x - 36 = 114$ 1 pont

Ebből: $x = 15$ 1 pont

A keresett számok: 15; 12; 24; 21; 42, 1 pont

Ezek megfelelnek a feltételeknek. 1 pont

3. Egészítsük ki az ábrát az $E(3;3)$ ponttal, így a DACE négyszög paralelogramma, ezért AC párhuzamos DE. 3 pont

Az EDB szög egyállású a keresett szöggel. 2 pont

Az EDB háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, mivel DE és EB egy-egy 2-szer 3-as téglalap átlója; 2 pont

D pedig B 90° -os elforgatottja E körül. 2 pont

Így a keresett szöggel egyállású szög 45° -os, tehát az átlók 45° -os szöget zárnak be egymással. 1 pont

4. A keresett szám a feltételek miatt háromjegyű. 1 pont

Jelöljük a keresett számot: \overline{abc} -vel.

A feltételek miatt minden számjegye különböző,
és nem tartalmaz 0 számjegyet. 1 pont

A hat szám helyi értékes összege: $200(a+b+c)+20(a+b+c)+(a+b+c)$ 2 pont

A hat szám összege: $222(a+b+c)=4218$

Tehát: $a+b+c=19$ 2 pont

Ezek alapján a lehetséges számok, mivel nagyobb számjegy nem előz meg
kisebb számjegyet: 289, 379, 469, 568. 4 pont

5. Ezer egymást követő természetes szám között 500 db páros és 500 db páratlan
szám van 2 pont

A páros számok összege páros 2 pont

A páratlan számok összege szintén páros, 2 pont

mert páros db páratlan szám összege páros 2 pont

Tehát az 1000 db egymást követő természetes szám összege páros, 2-nél
nagyobb, tehát osztható kettővel, így nem prím. 2 pont